CHAPITRE 4

VARIÉTÉ ARITHMÉTIQUES : THÉORIE LOCALE

4.1. Rappels sur la théorie des shcémas

On désigne par **An** la catégorie des anneaux (commutatifs et unifères), par **Ela** la catégorie des espaces localement annelés, et par **Ens** la catégorie des ensembles. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, l'expression $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ désigne la catégorie des foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ vers **Ens** (les morphismes sont des transformations naturelles). On désigne par $\mathcal{C}^\circ$ la catégorie opposée de $\mathcal{C}$.

Théorème 4.1.1. — *Le foncteur de la catégorie* **Ela** *des espaces localement annelés vers* $\mathbf{An}^{\mathrm{o}}$*, qui envoie chaque espace localement annelé X en l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$, admet un adjoint à droite* Spec.

Démonstration. — Voir le cours de géométrie algébrique. □

Voici la construction du foncteur Spec. Pour tout anneau A, $\operatorname{Spec} A$ est l'espace des idéaux premiers de A muni de la topologie de Zariski et du faisceau $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ tel que

$$\Gamma(U_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) = A[f^{-1}],$$

où $f \in A$ et U_f est le sous-ensemble ouvert des idéaux premiers ne contenant pas f. Le théorème 4.1.1 montre que, si X est un espace localement annelé et si A est un anneau, alors on a une bijection fonctorielle

$$\mathbf{Ela}(X, \operatorname{Spec} A) \cong \mathbf{An}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, soit $h_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur $X \mapsto \mathcal{C}(A, X)$. Si $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur, on désigne par I_F la catégorie des couples (A, ρ), où A est un objet de $\mathcal{C}$ et $\rho \in F(A)$, et les morphismes dans la catégorie I_F sont définis comme

$$I_F\big((A,\rho),(A',\rho')\big) = \{f \in \mathcal{C}(A, A') \, : \, F(f)(\rho) = \rho'\}.$$

D'après le lemme de Yoneda, tout élément $\rho \in F(A)$ peut être considéré comme une transformation naturelle de h_A vers F. On obtient ainsi un système inductif $\psi = (\psi_{(A,\rho)} : h(A) \to F)_{(A,\rho)\in I_F}$ de morphismes de foncteurs representables vers F.

Proposition 4.1.2. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Alors F est la limite inductive du foncteur $I_F^\circ \to \mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ qui envoie $(A, \rho) \in I_F$ en h_A.*

Démonstration. — Nous avons déjà construit un système inductif ψ de morphismes de foncteurs représentables vers F. Il suffit de montrer que ce système vérifie la propriété universelle de limite inductive. Soient $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur et

$$\varphi = (\varphi_{(A,\rho)} : h(A) \to G)_{(A,\rho)\in I_F}$$

un système inductif de morphismes. Par le théorème de Yoneda on peut considérer $\varphi_{(A,\rho)}$ comme un élément de $G(A)$. On obtient ainsi un unique morphisme de foncteurs $\eta : F \to G$ qui enovie $\rho \in F(A)$ en $\varphi_{(A,\rho)}$ tel que $\varphi_{(A,\rho)} = \eta \circ \psi_{(A,\rho)}$ pour tout objet $(A, \rho) \in I_F$. La proposition est donc démontrée. □

Remarque 4.1.3. — La proposition 4.1.2 montre que, pour tout foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Nat}(F, G) \cong \mathrm{Nat}(\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} h_A, G) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathrm{Nat}(h_A, G) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} G(A).$$

Soient k un anneau. On désigne par $\mathbf{An}_k$ la catégorie des k-algèbres commutatives. Soit $\mathbf{Ela}_k$ la catégorie des espaces localement annelé sur $\mathrm{Spec}\, k$ (c'est-à-dire un espace localement annelé muni d'un morphisme vers $\mathrm{Spec}\, k$). Similairement au théorème 4.1.1, le foncteur de la catégorie $\mathbf{Ela}_k$ vers $\mathbf{An}_k^\circ$, qui envoie tout espace localement annelé X sur $\mathrm{Spec}\, k$ en la k-algèbre $\mathcal{O}_X(X)$, admet un adjoint à droite qui envoie toute k-algèbre A en $\mathrm{Spec}\, A$. En particulier, le foncteur $\mathrm{Spec} : \mathbf{An}_k^\circ \to \mathbf{Ela}_k$ est pleinement fidèle.

Théorème 4.1.4. — *Le foncteur de $\mathbf{Ela}_k$ vers $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$, qui envoie tout espace localement annelé X sur $\mathrm{Spec}\, k$ en le foncteur $\Phi_X : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ associant à toute k-algèbre A l'ensemble $\mathbf{Ela}_k(\mathrm{Spec}\, A, X)$, admet un adjoint à gauche Rg. En d'autres termes, pour tout foncteur $F \in \mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$ et tout espace localement annelé X sur $\mathrm{Spec}\, k$ on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbf{Ela}_k(\mathrm{Rg}(F), X) \cong \mathrm{Nat}(F, \Phi_X). \tag{4.1}$$

Démonstration. — Pour tout foncteur $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$. On construit $\mathrm{Rg}(F)$ comme la limite inductive

$$\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathrm{Spec}\, A$$

dans la catégorie $\mathbf{Ela}_k$. Cette construction définit un foncteur de $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$ vers $\mathbf{Ela}_k$. En outre, pour tout espace localement annelé X sur $\operatorname{Spec} k$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathbf{Ela}_k(\mathrm{Rg}(F), X) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} \mathbf{Ela}_k(\operatorname{Spec} A, X) = \varprojlim_{(A,\rho)} F_X(A) \cong \mathrm{Nat}(F, F_X).$$

$\square$

Remarque 4.1.5. — Soit X un espace localement annelé sur $\operatorname{Spec} k$. Le théorème définit un k-morphisme d'espaces localement annelés de la réalisation géométrique $\mathrm{Rg}(F_X)$ vers X, qui correspond à la transformation naturelle d'identité de F_X par la relation d'adjonction (4.1). Cependant, ce morphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme d'espaces localement annelés. On peut considéré l'espace à un point muni du faisceau d'anneaux constant A, où A est un anneau local. La réalisation géométrique du foncteur correspondant est $\operatorname{Spec} A$. Similairement, étant donné un foncteur F de $\mathbf{An}_k$ vers $\mathbf{Ens}$, la relation d'adjonction (4.1) définit une transformation naturelle de F vers $F_{\mathrm{Rg}(F)}$ correspondant au morphisme d'identité de $\mathrm{Rg}(F)$. Cette transormation naturelle n'est pas nécessairement un isomorphisme naturel.

Dans le cas où X est un k-schéma, alors la réalisation géométrique de Φ_X est isomorphe à X comme espace localement annelé sur $\operatorname{Spec} k$. Le théorème 4.1.4 montre alors que, le foncteur de la catégorie $\mathbf{Sch}_k$ des k-schémas vers $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$, qui envoie tout k-schéma X en le foncteur F_X, est pleinement fidèle. Autrement dit, pour tout couple X, Y de k-schémas, on a une bijection fonctorielle

$$\mathbf{Ela}_k(X, Y) \cong \mathrm{Nat}(F_X, F_Y).$$

Par abus de notation, on utilise souvent le même symbol pour désigne un k-schéma et le foncteur correspondant de $\mathbf{An}_k$ vers $\mathbf{Ens}$.

Exemple 4.1.6. — Soit k un anneau. On désigne par $\mathbb{A}^1_k : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli. C'est un foncteur représentable, qui est représenté par l'anneau des polynômes $k[T]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\mathbb{A}^n_k$ le foncteur $(\mathbb{A}^1_k)^n$. C'est aussi un foncteur représentable, qui est représenté par la k-algèbre des polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$ à n indéterminées.

Il est utile d'expliciter la construction de la réalisation géométrique d'un foncteur. Soient k un anneau et A une k-algèbre. Si K est un corps qui est une k-algèbre et si $f : A \to K$ est un homomorphisme de A vers un corps k, alors le noyau de f est un idéal premier de A. On construit ainsi une application de $\mathbf{An}_k(A, K) = h_A(K)$ vers $\operatorname{Spec} A$. Soit $\mathbf{Cps}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An}_k$ des k-algèbres qui sont des corps. Il s'avère que ces applications induisent une bijection entre les ensembles $\varinjlim h_A|_{\mathbf{Cps}_k}$ et $\operatorname{Spec} A$, où $h_A|_{\mathbf{Cps}_k}$ désigne la restriction du foncteur h_A à la catégorie $\mathbf{Cps}_k$. Comme les limites inductives se commutent, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.1.7. — *Soit F un foncteur de $\mathbf{An}_k$ vers $\mathbf{Ens}$. On a un bijection naturelle entre $|\operatorname{Rg}(F)|$ et $\varinjlim F|_{\mathbf{Cps}_k}$, où $|\operatorname{Rg}(F)|$ désigne l'espace sous-jacent de $\operatorname{Rg}(F)$.*

Démonstration. — L'espace annelé $\operatorname{Rg}(F)$ est défini comme une limite inductive

$$\operatorname{Rg}(F) \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_F} \operatorname{Spec} A. \tag{4.2}$$

Ensemblistement on a alors

$$|\operatorname{Rg}(F)| \cong \varinjlim_{(A,\rho)} \varinjlim_{K\in\mathbf{Cps}_k} \mathbf{An}_k(A,K) \cong \varinjlim_{K\in\mathbf{Cps}_k} \varinjlim_{(A,\rho)} h_A(K) \cong \varinjlim_{K\in\mathbf{Cps}_k} F(K).$$

□

Remarque 4.1.8. — Bien que la catégorie $\mathbf{Cps}_k$ n'est pas nécessairement filtrante, elle se décompose en des morceaux disjoint de sous-catégorie filtrantes indexée par $\operatorname{Spec} k$. En particulier, si $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur, K et K' sont deux k-algèbres qui sont des corps, et g et g' sont des éléments de $F(K)$ et $F(K')$, qui représentent le même point x de $\operatorname{Rg}(F)$, alors il existe une extension k-linéaire commune K'' des corps K et K', ainsi qu'un élément $g'' \in F(K'')$ tel que les images canonique de g et g' dans $F(K'')$ s'identifie à g''.

Définition 4.1.9. — Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On appelle *sous-foncteur* de F toute transformation nautrelle $\varphi : G \to F$ dans $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$ telle que $\varphi_A : G(A) \to F(A)$ est une application injective quel que soit $A \in \mathbf{An}_k$. On dit que deux sous-foncteurs $\varphi : G \to F$ et $\varphi' : G' \to F$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\psi : G \to G'$ tel que $\varphi'\psi = \varphi$.

Si $\varphi : G \to F$ est un sous-foncteur de F tel que, pour toute k-algèbre A et toute transformation naturelle $\rho : h_A \to F$, le sous-foncteur $\mathrm{pr}_1 : h_A \times_F G \to h_A$ de h_A est isomorphe au sous-foncteur défini par un ouvert de $\operatorname{Spec} A$, on dit que φ est une *immersion ouverte* et que G est un *sous-foncteur ouvert* de F.

Si X est un espace localement annelé sur $\operatorname{Spec} k$ et si U est un ouvert de X, alors Φ_U est un sous-foncteur ouvert de Φ_X.

Soit $G : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Pour tout $x \in |\operatorname{Rg}(G)|$ et toute k-algèbre K qui est un corps, on désigne par $G_x(K)$ le sous-ensemble de $G(K)$ qui consiste des points dont l'image dans $\varinjlim G|_{\mathbf{Cps}_k}$ s'identifie à x. Si U est un sous-ensemble de $|\operatorname{Rg}(G)|$, on désigne par $G_U : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout anneau A en

$$G_U(A) := \Big\{\rho \in G(A) \,\Big|\, \forall\, K \in \mathbf{Cps}_k, \forall f \in \mathbf{An}_k(A,K), \quad G(f)(\rho) \in \bigcup_{x\in U} G_x(K)\Big\}.$$

C'est un sous-foncteur de G. De plus, on a

$$U \cong \varinjlim_{K\in\mathbf{Cps}_k} G_U(K).$$

En outre, si $\varphi : F \to G$ est un morphisme de foncteurs dans $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$ et si $V = \mathrm{Rg}(\varphi)^{-1}(U)$, alors pour toute k-algèbre A on a

$$F_V(A) = \varphi_A^{-1}(G_U(A)).$$

En particulier, on a $F_V \cong F \times_G G_U$.

Lemme 4.1.10. — *$F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur et G un sous-foncteur ouvert de F. Alors l'application canonique $|\,\mathrm{Rg}(G)| \to |\,\mathrm{Rg}(F)|$ est injective et identifie $|\,\mathrm{Rg}(G)|$ à un sous-ensemble ouvert de $|\,\mathrm{Rg}(F)|$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut suppose que, pour chaque $A \in \mathbf{An}_k$, $G(A)$ est un sous-ensemble de $F(A)$.

Soient K et K' deux k-algèbres qui sont des corps, et g et g' des éléments de $G(K)$ et $G(K')$ respectivement, qui définissent le même point de $\mathrm{Rg}(F)$. D'après la remarque 4.1.8, il existe une extension k-linéaire commune K'' de K et K' et $g'' \in F(K'')$ tels que les images canoniques de g et g' dans $F(K'')$ s'identifient à g''. En particulier, on a $g'' \in G(K'')$ et donc les éléments g et g' définissent le même point de $|\,\mathrm{Rg}(G)|$. Cela montre que l'application canonique $|\,\mathrm{Rg}(G)| \to |\,\mathrm{Rg}(F)|$ est injectif.

D'après la construction de la réalisation géométrique (4.2), pour montrer que $U = |\,\mathrm{Rg}(G)|$ est un sous-ensemble ouvert de $|\,\mathrm{Rg}(F)|$, il suffit de montrer que, pour tout objet (A, ρ) de I_F, le sous-ensemble $\widetilde{\rho}^{-1}(U)$ est ouvert, où $\widetilde{\rho} = \mathrm{Rg}(\rho) : \mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Rg}(X)$ est le k-morphisme localement annelé correspondant à ρ. Comme G est un sous-foncteur ouvert de F, le sous-foncteur $h_A \times_{F,\rho} G$ est défini par un sous-ensemble ouvert $\widetilde{U}$ de $\mathrm{Spec}\, A$. Il suffit de montrer que $\widetilde{U} = \widetilde{\rho}^{-1}(U)$.

Soient x un point de $\mathrm{Spec}\, A$ et K le corps résiduel $\kappa(x)$. On désigne par $\varphi_x : h_K \to h_A$ le morphisme foncteur correspondant à l'homomorphisme canonique $A \to K$. On a $\widetilde{\rho}(x) \in U$ si et seulement si $\rho \circ \varphi_x \in G(K)$. Cela montre que $\widetilde{U} = \widetilde{\rho}^{-1}(U)$. La proposition est ainsi démontrée. □

Lemme 4.1.11. — *Soient X un espace localement annelé sur $\mathrm{Spec}\, k$, U une partie ouverte de X et $\widetilde{U}$ l'image réciproque de U dans $\mathrm{Rg}(F_X)$ par le morphisme canonique $\mathrm{Rg}(F_X) \to X$. Alors $(F_X)_{\widetilde{U}}$ s'identifie au sous-foncteur F_U de F_X.*

Démonstration. — Soit A une k-algèbre. Par définition, $(F_X)_{\widetilde{U}}(A)$ est l'ensemble des k-morphismes $\rho : \mathrm{Spec}\, A \to X$ tels que, pour tout homomorphisme de K-algèbres f de A vers un corps K, l'image de $\rho \circ \mathrm{Spec}(f)$ est dans U. Cela revient à dire que l'image de ρ est contenu dans U. □

Proposition 4.1.12. — *Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. La correspondance $U \mapsto F_U$ donne une bijection entre l'ensemble des ouverts de $|\,\mathrm{Rg}(F)|$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'immersions ouvertes dans F.*

Démonstration. — D'après la construction de $|\,\mathrm{Rg}(F)|$, si U est une partie ouverte de $|\,\mathrm{Rg}(F)|$, alors pour tout $(A, \rho) \in I_F$, le sous-ensemble $V = \mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)$ de $\mathrm{Spec}\, A$

est ouvert. On obtient alors que $h_A \times_F F_U \cong (h_A)_V \cong F_V$, compte tenu du lemme précédent. Donc $F_U \to F$ est une immersion ouverte.

Il reste à montrer que, pour toute immersion ouverte $G \to F$, il existe un et un seul sous-ensemble ouvert U de $|\operatorname{Rg}(F)|$ tel que G soit isomorphe à F_U. Sans perte de généralité, on peut supposer que $G(A)$ est un sous-ensemble de $F(A)$ pour toute k-algèbre A (de façon fonctorielle). Si un tel sous-ensemble ouvert U existe, alors on a $U = \varinjlim F_U|_{\mathbf{Cps}_k} = \varinjlim G|_{\mathbf{Cps}_k}$, qui montre l'unicité. Donc il suffit de vérifier que $U = \varinjlim G|_{\mathbf{Cps}_k}$ est effectivement un sous-ensemble ouvert de $|\operatorname{Rg}(F)|$ et que $G = F_U$. D'après le lemme 4.1.10, on obtient que U est un sous-ensemble ouvert de $|\operatorname{Rg}(F)|$. En outre, sa démonstration montre que, pour toute k-algèbre A et tout $\rho \in F(A)$, on a $h_A \times_{F,\rho} G = h_A \times_{F,\rho} F_U$. D'où $\rho \in G(A)$ si et seulement si $\rho \in F_U(A)$. D'où $G = F_U$.

□

Définition 4.1.13. — Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On désigne par $A(F)$ l'ensemble $\operatorname{Nat}(F, \mathbb{A}^1_k)$. Cet ensemble est naturellement muni d'une structure d'algèbre sur k. Tout élément de $\operatorname{Nat}(F, \mathbb{A}^1_k)$ est appelé une *fonction régulère* sur F.

Définition 4.1.14. — Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On dit que F est un faisceau pour la topologie de Grothendieck-Zariski si, pour toute k-algèbre A et toute famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de A qui engendre A comme idéal, on a une suite exacte

$$F(A) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} F(A_{f_i f_j}) .$$

Par exemple, pour tout espace localement annelé X, le foncteur F_X est un faisceau. En particulier, tout foncteur représentable est un faisceau.

Proposition 4.1.15. — *Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) F est un faisceau pour la topologie de Grothendieck-Zariski ;

(2) pour toute k-algèbre A, le préfaisceau d'ensembles sur $\operatorname{Spec} A$, qui envoie tout ouvert U de $\operatorname{Spec} A$ en $\operatorname{Nat}(F_U, F)$, est un faisceau,

(3) pour tout foncteur $G : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$, le préfaisceau d'ensembles sur $|\operatorname{Rg}(G)|$, qui envoie U en $\operatorname{Nat}(G_U, F)$, est un faisceau.

Démonstration. — "(3)$\Longrightarrow$(2)" est évident.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" : Pour toute k-algèbre A et tout $f \in A$, on a $\operatorname{Nat}(D(f), F) \cong F(A_f)$.

"(1)$\Longrightarrow$(2)" provient du fait que les $\operatorname{Spec} A_f$ $(f \in A)$ forment une base de topologie de $\operatorname{Spec} A$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Soit U un ouvert de $|\operatorname{Rg}(G)|$. On a

$$G_U \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_G^\circ} (h_A)_{\operatorname{Rg}(\rho)^{-1}(U)} \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_G^\circ} F_{\operatorname{Rg}(\rho)^{-1}(U)}.$$

Donc on a une bijection fonctorielle

$$\mathrm{Nat}(G_U, F) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_G^\circ} \mathrm{Nat}(F_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, F).$$

Cela montre que $U \mapsto \mathrm{Nat}(G_U, F)$ est une limite projective de faisceaux, donc est lui-même un faisceau. □

Proposition 4.1.16. — *Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On désigne par $\mathcal{O}_F$ le faisceau d'anneaux structurel de $\mathrm{Rg}(F)$. Alors pour tout ouvert U de $\mathrm{Rg}(F)$, l'anneau $\mathcal{O}_F(U)$ est canoniquement isomorphe à $A(F_U)$.*

Démonstration. — Comme $\mathbb{A}_k^1$ est un foncteur représentable, le préfaisceau $U \mapsto A(F_U) \cong \mathrm{Nat}(F_U, \mathbb{A}_k^1)$ est un faisceau.

On commence par démontrer le résultat dans le cas particulier où F est un foncteur représentable h_B. On a $\mathrm{Rg}(F) = \mathrm{Spec}\, B$. Il suffit de vérifier que $A(F_U) = \mathcal{O}_F(U)$ dans le cas où $U = D(f)$ avec $f \in B$. On a $F_U \cong h_{B_f}$ et donc $\mathrm{Nat}(F_U, \mathbb{A}_k^1) \cong B_f = \mathcal{O}_F(U)$.

Dans le cas général, on écrit F comme une limite inductive de foncteur représentable. On a

$$F_U = \varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \Phi_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_F(U) &\cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathrm{Nat}(\Phi_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, \mathbb{A}_k^1) \\ &= \mathrm{Nat}(\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \Phi_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, \mathbb{A}_k^1) \cong \mathrm{Nat}(F_U, \mathbb{A}_k^1) = A(F_U).\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.17. — *Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{An}_k$ vers $\mathbf{Ens}$. Si $\varphi : F \to G$ est une immersion ouverte, alors $\mathrm{Rg}(\varphi)$ est une immersion ouverte d'espace localement annelés.*

Définition 4.1.18. — Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-foncteurs de F. On dit que $(F_i)_{i\in I}$ recouvre F si, pour tout corps $K \in \mathbf{Cps}_k$ on a $F(K) \subset \bigcup_{i\in I} F_i(K)$. On dit que F est représentable par un k-schéma s'il est un faisceau et s'il est recouvert par une famille d'immersions ouvertes dont les sources sont des foncteurs représentables (ou localement représentable).

***Théorème 4.1.19* (Théorème de comparaison)**. — *Soient X un espace localement annelé sur $\mathrm{Spec}\, k$ et $G : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur.*

(1) Si X est un k-schéma, alors le morphisme canonique $\mathrm{Rg}(\Phi_X) \to X$ est un isomorphisme.

(2) G est représentable par un k-schéma si et seulement si $\mathrm{Rg}(G)$ est un k-schéma et si le morphisme canonique de foncteurs $G \to \Phi_{\mathrm{Rg}(G)}$ est un isomorphisme.

Démonstration. — (1) Si x est un point de X et $\kappa(x)$ est le corps résiduel de x, alors on a un morphisme $\operatorname{Spec}\kappa(x) \to X$ qui définit un élément de $\Phi_X(\kappa(x))$. Réciproquement, si $K \in \mathbf{Cps}_k$ et $f : \operatorname{Spec} K \to X$ est un morphisme d'espaces localement annelés sur $\operatorname{Spec} K$, avec $\{x\} = \operatorname{Im}(f)$, alors K est une extension de $\kappa(x)$. Donc le morphisme $\operatorname{Rg}(X) \to X$ est une bijection ensembliste.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des schémas affines. Alors le morphisme canonique $\operatorname{Rg}(\Phi_{U_i}) \to U_i$ est un isomorphisme. En outre, d'après le corollaire 4.1.17, $\operatorname{Rg}(\Phi_{U_i})$ est une immersion ouverte de $\operatorname{Rg}(\Phi_X)$ comme espaces localement annelés. Donc $\operatorname{Rg}(\Phi_X) \to X$ est un isomorphisme.

(2) "$\Longleftarrow$" : Comme $\operatorname{Rg}(G)$ est un espace localement annelé sur $\operatorname{Spec} k$, $\Phi_{\operatorname{Rg}(G)}$ est un faisceau (recollement de morphismes d'espaces localement annelés), donc G l'est aussi. En outre, comme $\operatorname{Rg}(G)$ est un k-schéma, il admet un recouvrement ouvert par des k-schémas affines. Donc $\Phi_{\operatorname{Rg}(G)} \cong G$ admet un recouvrement par des immersions ouvertes dont les sources sont des foncteurs représentables.

"$\Longrightarrow$" : On suppose que G est représentable par un k-schéma. Soit $(G_i)_{i\in I}$ un recouvrement de G par des sous-foncteurs ouverts représentables. Alors $(\operatorname{Rg}(G_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\operatorname{Rg}(G)$ par des k-schémas affines. Donc $\operatorname{Rg}(G)$ est un schéma. Enfin, on a $G_i \cong \Phi_{\operatorname{Rg}(G_i)}$ pour chaque i. Comme G est un faisceau, $U \mapsto \operatorname{Nat}(G_U, G)$ est un faisceau sur $|\operatorname{Rg}(G)|$. Le recollement des immersion ouverte $\Phi_{\operatorname{Rg}(G_i)} \to G$ conduit à un morphismes de foncteur $\Phi_{\operatorname{Rg}(G)} \to G$ qui donne l'inverse du morphisme canonique de foncteurs $G \to \Phi_{\operatorname{Rg}(G)}$.

□

Corollaire 4.1.20. — *On désigne par* $\mathbf{Sch}_k$ *la sous-catégorie pleine des k-schémas de* $\mathbf{Fon}(\mathbf{An}_k, \mathbf{Ens})$. *Alors le foncteur* $\operatorname{Rg} : \mathbf{Sch}_k \to \mathbf{Ela}_k$ *est pleinement fidèle.*

Exemple 4.1.21. — Soit E un k-module. On désigne par $\mathbb{P}(E) : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie toute k-algèbre A en l'ensemble des quotient projectif de rang 1 du A-module $E \otimes_k A$. Par le recollement de faisceaux, on obtient que le foncteur $\mathbb{P}(E)$ est un faisceau pour la topologie de Grothendieck-Zariski. Montrons qu'il est localement représentable. Pour tout $s \in E$, soit $D(s)$ le sous-foncteur de $\mathbb{P}(E)$ qui envoie $A \in \mathbf{An}_k$ en l'ensemble des quotients $E \to A$ tel que le composé

$$A \xrightarrow{s} E \otimes_k A \longrightarrow A$$

soit l'application d'identité. Si R est une k-algèbre et si ρ est un élément de $\mathbb{P}(E)(R)$, correspondant à un quotient inversible $\phi : E \otimes_k R \to L$, alors $h_R \times_{\mathbb{P}(E),\rho} D(s)$ envoie $A \in \mathbf{An}_k$ en l'ensemble des homomorphismes $R \to A$ tels que l'homomorphisme composé

$$A \xrightarrow{s} E \otimes_k R \otimes_R A \longrightarrow L \otimes_R A$$

soit un isomorphisme. Ce sous-foncteur est une immersion ouverte. En effet, si on désigne par $\mathfrak{a}$ le noyau de l'homomorphisme composé

$$R \xrightarrow{s} E \otimes_k R \longrightarrow L \ ,$$

alors le sous-foncteur est défini par $D(\mathfrak{a})$. En outre, le foncteur $D(s)$ est représentable par l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_k(H_\phi)$, où $H_\phi = \mathrm{Ker}(\phi)$. Enfin, il est facile de vérifier que les $D(s)$, $s \in E$ recouvre $\mathbb{P}(E)$. Donc $\mathbb{P}(E)$ est représenté par un k-schéma.

4.2. Diviseurs

Soit A un anneau. Les non-diviseur de zéro dans A forment une partie multiplicative. La localisation de A par rapport à cette partie multiplicative est appelé l'*anneau total des fractions de A*.

Soit X un espace localement annelé. On désigne par $\mathcal{S}_X$ le faisceau sur X tel que

$$\mathcal{S}_X(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \ : \ \text{l'homothétie } s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \text{ est injective}\}.$$

Par définition, $\mathcal{S}_X(U)$ est contenu dans l'ensemble des non-diviseur de zéro de $\mathcal{O}_X(U)$. Cependant, cette inclusion est stricte en général. Cependant, dans le cas où $X = \mathrm{Spec}\, A$ est un schéma affine, alors $\mathcal{S}_X(X)$ s'identifie à l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A. En effet, la A-algèbre $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} A_\mathfrak{p}$ est fidèlement plat.

On désigne par $\mathscr{M}_X$ le faisceau associé au préfaisceau d'anneaux

$$U \longmapsto \mathcal{S}_X(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U).$$

Les éléments de $\mathscr{M}_X(U)$ sont appelés des *fonctions méromorphes* sur U.

On désigne par $\mathcal{O}_X^\times$ le faisceau de groupe abéliens

$$U \longmapsto \{s \in \mathcal{O}_X(U) \ : \ \text{l'homothétie } s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \text{ est un isomorphisme}\}.$$

De façon similaire, on définit $\mathscr{M}_X^\times$ comme le faisceau

$$U \longmapsto \{s \in \mathscr{M}_X(U) \ : \ \text{l'homothétie } s : \mathscr{M}_U \to \mathscr{M}_U \text{ est un isomorphisme}\}$$

Par définition $\mathcal{O}_X^\times$ est un sous-faisceau de $\mathscr{M}_X^\times$.

Définition 4.2.1. — On appelle *diviseur de Cartier* sur X toute section globale de $\mathscr{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$. On désigne par $\mathrm{Div}(X)$ le groupe de tous les diviseurs de Cartier sur X.

La suite exacte de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathscr{M}_X^\times \longrightarrow \mathscr{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

induit une suite exactes de groupes commutatifs.

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{M}_X^\times) \xrightarrow{\mathrm{div}(\cdot)} \mathrm{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \cong \mathrm{Pic}(X) \ ,$$

où $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X. Tout diviseur dans l'image de l'appliction

$$\mathrm{div}(\cdot) : \Gamma(X, \mathscr{M}_X^\times) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$$

est appelé un *diviseur principal*. Si deux diviseurs diffèrent par un diviseur principal, on dit qu'ils sont *linéairement équivalents*.

Plus généralement, si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible et si s est une section inversible de $\mathscr{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L$ (c'est-à-dire qu'il existe une section globale $s^\vee$ de $\mathscr{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L^\vee$ telle que $ss^\vee = 1$), alors s détermine un diviseur de Cartier que l'on note comme $\mathrm{div}(s)$. Une telle section de $\mathscr{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L$ est appelée une section méromorphe inversible.

Le recollement de faisceau permet de construire, pour chaque diviseur de Cartier D sur X, un sous-$\mathcal{O}_X$-module inversible de $\mathscr{M}_X$ que l'on note comme $\mathcal{O}_X(D)$, et il existe une section méromorphe inversible s_D telle que $\mathrm{div}(s_D) = D$.

On dit qu'un diviseur D est *effectif* s'il appartient à l'espace $\Gamma(X, (\mathscr{M}_X^\times \cap \mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_X^\times)$. On utilise l'expression $D \geqslant 0$ pour désigner l'énoncé "*D est un diviseur effectif*".

Dans la suite, on suppose que X est un schéma intègre sur un corps k. Le faisceau $\mathscr{M}_X$ est alors engendré par le préfaisceau constant $\underline{k(X)}$, où $k(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X (le corps résiduel du point générique de X), qui s'identifie à l'anneau des fonctions méromorphes sur X. On a

$$\Gamma(X, \mathscr{M}_X^\times) = k(X)^\times$$

Si D est un diviseur de Cartier sur X, on désigne par $H^0(D)$ le sous-ensemble de $k(X)$ défini comme

$$H^0(D) = \{0\} \cup \{f \in k(X)^\times \mid \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\}.$$

L'ensemble $H^0(D)$ est stable par la multiplication par un scalaire dans k. En effet, pour tout $a \in k^\times \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$, on a $\mathrm{div}(a) = 0$. En outre, $H^0(D)$ est également stable par l'addition. En effet, si localement D est représenté par une section s de $\mathscr{M}_X^\times$, alors $\mathrm{div}(f) + D$ est représenté par fs, où $f \in k(X)^\times$. La condition $\mathrm{div}(f) + D$ correspond à $fs \in \mathcal{O}_X$. Si f et g sont deux éléments de $H^0(D)$, on a $(f+g)s = fs + gs \in \mathcal{O}_X$. Donc on a $f + g \in H^0(D)$. L'ensemble $H^0(D)$ est appelé le *système linéaire* de D. C'est un sous-espace k-vectoriel de $k(X)$.

Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et s_0 une section rationnelle non-nulle de L. Soit D le diviseur $\mathrm{div}(s_0)$. Pour tout fonction $f \in H^0(D)$, la section rationnelle fs_0 provient d'une section globale du $\mathcal{O}_X$-module inversible L. Réciproquement, si s est une section rationnelle de L, alors il existe un unique fonction rationnelle f telle que $s = fs_0$. En outre, on a $f \in H^0(D)$ si et seulement si s est une section globale de L. On obtient ainsi un isomorphisme k-linéaire de $H^0(D)$ vers $H^0(X, L)$ qui envoie $f \in H^0(D)$ en fs_0.

On désigne par $\mathrm{Div}(X)_\mathbb{R}$ l'espace $\mathbb{R}$-vectoriel engendré par $\mathrm{Div}(X)$. Tout élément de $\mathrm{Div}(X)_\mathbb{R}$ est appelé un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X. Le cône engendré par les diviseurs effectifs est noté comme $\mathrm{Div}(X)_\mathbb{R}^+$. Tout élément de $\mathrm{Div}(X)_\mathbb{R}^+$ est appelé un $\mathbb{R}$-diviseur effectif. Si $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}^{+}$, on note $D \geqslant 0$. Le morphisme de groupes $\mathrm{div}(\cdot) : k(X)^{\times} \to \mathrm{Div}(X)$ induit une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\mathrm{div}_{\mathbb{R}}(\cdot) : k(X)^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}.$$

Si $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$, on définit

$$H^0(D) := \{0\} \cup \{f \in k(X)^{\times} \mid \mathrm{div}_{\mathbb{R}}(f) + D \geqslant 0\}.$$

Si D_1 et D_2 sont deux ($\mathbb{R}$-)diviseurs de Cartier, on a une application k-bilinéaire

$$H^0(D_1) \times H^0(D_2) \longrightarrow H^0(D_1 + D_2)$$

qui envoie $(f, g) \in H^0(D_1) \times H^0(D_2)$ en fg. Ainsi, si D est un ($\mathbb{R}$-)diviseur de Cartier, alors la somme directe

$$V_{\bullet}(D) := \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(nD)T^n$$

forme une sous-k-algèbre graduée de l'anneau des polynômes

$$k(X)[T] = \bigoplus_{n \geqslant 0} k(X)T^n.$$

4.3. Réalisation analytique

Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. On suppose que $(k, |\cdot|)$ est complet. Soit $\mathbf{Cpv}_k$ la catégorie des extensions valuées de k. Les objets de $\mathbf{Cpv}_k$ sont des corps extensions de k qui sont munies des valeurs absolues qui prolonge $|\cdot|$. Si $(K, |\cdot|)$ et $(K', |\cdot|')$ sont deux objets de $\mathbf{Cpv}_k$, un morphisme de $(K, |\cdot|)$ vers $(K', |\cdot|')$ est par définition un morphisme de corps $\varphi : K \to K'$ tel que $|\varphi(x)|' = |x|$ pour tout $x \in K$. On désigne par $\iota : \mathbf{Cpv}_k \to \mathbf{An}_k$ le foncteur d'oubli.

Définition 4.3.1. — Soit $F : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On appelle *espace analytique de Berkovich* de F la limite inductive de $F \circ \iota$, noté comme F^{an}. La propriété universelle de limite inductive conduit à une application naturelle $j : F^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Rg}(F)$, appelée l'application de spécification.

Soient x un point de F^{an} et $\kappa(x)$ le corps résiduel de $j(x)$. Si $(K, |\cdot|)$ est un élément de $\mathbf{Cpv}_k$ et si ρ est un élément de $F(K)$ qui représente la classe x, alors K contient le corps $\kappa(x)$ et la restriction de la valeur absolue $|\cdot|$ à $\kappa(x)$ ne dépend pas du représentant $(K, |\cdot|, \rho)$. On obtient ainsi une valeur absolue sur $\kappa(x)$ que l'on note comme $|\cdot|_x$. On désigne par $\widehat{\kappa}(x)$ le complété de $\kappa(x)$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|$. On souligne que, même si x et x' sont deux points différents de F^{an}, il se peut que les corps résiduel $\kappa(x)$ et $\kappa(x')$ sont les mêmes, mais dans ce cas-là les valeurs absolue $|\cdot|_x$ et $|\cdot|_{x'}$ sont différentes.

La topologie sur $\mathrm{Rg}(F)$ induit naturellement une topologie sur F^{an}. C'est la topologie la moins fine qui rend continue l'application de spécification j. On l'appelle la topologie de Zariksi sur F^{an}. Dans la suite, on construit une autre topologie sur F^{an} qui est plus fine que la topologie de Zariksi.

Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$, qui correspond à une immersion ouverte $F_U \to F$. Pour toute fonction régulière $f \in A(F_U)$, le morphisme $f : F_U \to \mathbb{A}^1_k$ induit, pour chaque point $x \in F_U^{\mathrm{an}}$, un élément $f(x) \in \kappa(x)$ qui est l'image de l'élément canonique de $F(\kappa(x))$ par f. On désigne par $|f|(x)$ la valeur absolue $|f(x)|_x$ et obtient ainsi une fonction positive sur F_U^{an}.

Définition 4.3.2. — On appelle *topologie de Berkovich* sur F^{an} la topologie la moins fine qui rend continue l'application j et toutes les fonctions de la forme $|f|$, où f est une fonction régulière sur un ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$. L'ensemble F^{an} muni de la topologie de Berkovich est appelé l'espace de Berkovich associé au foncteur F.

Notation. — Si X est un espace localement annelé sur $\operatorname{Spec} k$, on désigne par X^{an} l'espace de Berkovich associé au foncteur Φ_X.

Proposition 4.3.3. — *Soit X un schéma intègre et de type fini sur* $\operatorname{Spec} k$. *Tout ouvert non-vide de X^{an} pour la topologie de Zariski est dense pour la topologie de Berkovich.*

Démonstration. — Voir le corollaire 3.4.5 du livre de Berkovich "*Spectral theory and analytic geometry over non- Archimedean fields*", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. □

Soit X un schéma sur $\operatorname{Spec} k$. On désigne par $\mathcal{C}^0_{X^{\mathrm{an}}}$ le faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur l'espace topologie X^{an}. Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle *métrique continue* sur L tout morphisme de faisceaux d'ensembles $\|.\|$ de L vers $j_*(\mathcal{C}^0_{X^{\mathrm{an}}})$ qui vérifie les conditions suivantes :

(a) pour tout ouvert U de X, toute section $s \in \Gamma(U, L)$ et tout point $x \in U^{\mathrm{an}}$, la valeur de la fonction $\|s\|$ en x ne dépend que de $s(x)$, la réduction de s dans $L(x) = L \otimes \kappa(x)$,

(b) pour tout point $x \in X^{\mathrm{an}}$, le morphisme de faisceaux $\|.\|$ induit une norme sur l'espace $\kappa(x)$-vectoriel $L(x)$, où on considère la valeur absolue $|.|_x$ sur $\kappa(x)$.

Si L est muni d'une métrique continue $\|.\|_L$, alors le faisceau dual $L^\vee$ est naturellement muni d'une métrique continue $\|.\|_{L^\vee}$ telle que $|\alpha(s)| = \|\alpha\|_{L^\vee} \cdot \|s\|_L$ pour toutes sections α et s de $L^\vee$ et L au-dessus d'un ouvert Zariski de X.

Comme X est un k-schéma projectif, l'espace topologique X^{an} est compact (cf. [**?**, proposition 3.4.8]). Si L est un fibré inversible sur X muni d'une métrique continue $\|.\|$, alors l'application $\|.\|_{\sup} : \Gamma(X, L) \to \mathbb{R}_+$ qui envoie $s \in \Gamma(X, L)$ en

$$\sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} \|s\|(x)$$

est une norme sur $\Gamma(X, L)$, qui est une ultranorme lorsque $(k, |.|)$ est un corps valué non-archimédien.

Un exemple typique de métrique continue sur un fibré inversible est la métique de Fubini-Study. Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k, muni d'une norme $\|.\|$, qui est supposée être une ultra-norme lorsque k est non-archimédienne. Si k' est une extension valuée de k, alors on peut naturellement définir une norme sur l'espace k'-vectoriel $V\otimes_k k'$ par dualité. On considère $V\otimes_k k'$ comme l'espace dual de l'espace k'-vectoriel $\mathrm{Hom}_k(V,k')$. On munit $\mathrm{Hom}_k(V,k')$ de la norme d'opérateur et $V\otimes_k k'$ de la norme duale. On suppose que le schéma X est un sous-schéma fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et que le fibré inversible L est la restriction du faisceau inversible universel $\mathcal{O}_V(1)$. Pour tout point $x\in X^{\mathrm{an}}$, le morphisme $j(x):\mathrm{Spec}\,\kappa(x)\to X$ induit un homomorphisme surjectif $V\otimes_k\kappa(x)\to L(x)$. On munit $L(x)$ de la norme quotient et obtient ainsi une métrique continue sur L, appelée la *métrique de Fubini-Study* associée au plongement $X\to\mathbb{P}(V)$.

4.3.1. Metric on a vector bundle. — Let X be a scheme over $\mathrm{Spec}\,k$. We denote by $\mathcal{F}_{X^{\mathrm{an}}}$ the sheaf of all real-valued functions on the Berkovich space X^{an}. Let $\mathcal{C}^0_{X^{\mathrm{an}}}$ be the subsheaf of $\mathcal{F}_{X^{\mathrm{an}}}$ of all continuous functions.

Définition 4.3.4. — Let E be a vector bundle on X (namely a locally free $\mathcal{O}_X$-module of finite rank). We call *metric* on E any family $\varphi=(\|\cdot\|_\varphi(x))_{x\in X^{\mathrm{an}}}$, where each $\|\cdot\|_\varphi(x)$ is a norm on $E(x):=E\otimes\widehat{\kappa}(x)$, where $\widehat{\kappa}(x)$ is the completion of $\kappa(x)$ with respect to the absolute value $|\cdot|_x$.

Note that the family φ actually defines a morphism of sheaves (of sets) from E to $j_*(\mathcal{F}_{X^{\mathrm{an}}})$, which sends each section s of E over a Zariski open subset U of X to the function $\|s\|_\varphi:U^{\mathrm{an}}\to\mathbb{R}_+$ sending $x\in U^{\mathrm{an}}$ to $\|s\|_\varphi(x):=\|s(x)\|_\varphi(x)$, where $s(x)$ denotes the reduction of s in $E(x)$. If this morphism of sheaves takes values in $j_*(\mathcal{C}^0_{X^{\mathrm{an}}})$ (namely, for any section s of E on a Zariski open subset of X, the function $\|s\|_\varphi$ is continuous with respect to the Berkovich topology), we say that the metric φ is *continuous*.

Remarque 4.3.5. — Let E be a vector bundle on X, equipped with a continuous metric φ. Let F be a vector subbundle of E. For any $x\in X^{\mathrm{an}}$, the restriction of the norm $\|\cdot\|_\varphi(x)$ on $F(x)$ defines a norm on $F(x)$. These norms actually define a continuous metric on F. However, it is not clear that, for any quotient vector bundle of E, the quotient norms of $\|\cdot\|_\varphi(x)$ $(x\in X^{\mathrm{an}})$ define a continuous metric on the quotient bundle.

Lemme 4.3.6. — *Let M be a topological space and f be a non-negative function on M. Suppose that, for any $\alpha\in(0,1)$, there exists a continuous function f_α on M such that $\alpha f_\alpha\leqslant f\leqslant f_\alpha$. Then the function f is continuous.*

Démonstration. — Let x_0 be a point of M. From the inequalities $\alpha f_\alpha\leqslant f\leqslant f_\alpha$, we deduce

$$\liminf_{x\to x_0}\alpha f_\alpha(x)\leqslant\liminf_{x\to x_0}f(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\limsup_{x\to x_0}f_\alpha(x).$$

Since the function f_α is continuous, we obtain

$$\alpha f_\alpha(x_0) \leqslant \liminf_{x\to x_0} f(x) \leqslant \limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant f_\alpha(x_0).$$

Moreover, one has $\alpha f_\alpha(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant f_\alpha(x_0)$. Hence

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leqslant \limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant \alpha^{-1} f(x_0) \leqslant \alpha^{-1} f_\alpha(x_0) \leqslant \alpha^{-2} \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Since $\alpha \in (0,1)$ is arbitrary and $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ is finite, we obtain

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

The proposition is thus proved. □

Proposition 4.3.7. — *Let $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$ be a k-scheme and $(V, \|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over k. We assume that, either k is archimedean, or the norm $\|\cdot\|$ is ultrametric. For any $x \in X^{\mathrm{an}}$, let $\|\cdot\|(x)$ be the norm on $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$ induced by $\|\cdot\|$ by extension of scalars. Then the norms $\|\cdot\|(x)$, $x \in X^{\mathrm{an}}$ define a continuous metric on the vector bundle $\pi^*(V)$.*

Démonstration. — Let U be a Zariski open subset of X and s be a section of $\pi^*(V)$ over U. It suffice to prove that the function $(x \in U^{\mathrm{an}}) \mapsto \|s\|(x)$ is continuous on U^{an}.

We first treat the case where the norm $\|\cdot\|$ is ultrametric. By Proposition **??**, for any $\alpha \in (0,1)$, there exists an α-orthogonal basis $(e_i)_{i=1}^n$ of V. By Proposition **??**, for any $x \in X^{\mathrm{an}}$, it is also an α-orthogonal basis of $(V \otimes_k \widehat{\kappa}(x), \|\cdot\|(x))$. We can write s into the form $s = f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$, where $f_1, \ldots, f_n$ are regular functions on U. Since $(e_i)_{i=1}^n$ is an α-orthogonal basis and the norm $\|\cdot\|$ is ultrametric, one has

$$\forall\, x \in U^{\mathrm{an}},\ \alpha \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |f_i|_x \cdot \|e_i\|(x) \leqslant \|s\|(x) \leqslant \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |f_i|_x \cdot \|e_i\|(x).$$

By Proposition **??**, one has $\|e_i\|(x) = \|e_i\|$ for any $x \in X^{\mathrm{an}}$. Hence

$$\forall\, x \in U^{\mathrm{an}},\ \alpha \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |f_i|_x \cdot \|e_i\| \leqslant \|s\|(x) \leqslant \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |f_i|_x \cdot \|e_i\|.$$

Note that the function $(x \in U^{\mathrm{an}}) \mapsto |f_i|_x$ is continuous for any i. Hence the function

$$(x \in U^{\mathrm{an}}) \longmapsto \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |f_i|_x \cdot \|e_i\|$$

is also continuous. Since $\alpha \in (0,1)$ is arbitrary, by Lemma 4.3.6 we obtain that the function $(x \in U^{\mathrm{an}}) \mapsto \|s\|(x)$ is continuous.

We now consider the archimedean case. Let $(e_i)_{i=1}^n$ be a basis of V. We write the section s in the form $f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$, where $f_1, \ldots, f_n$ are regular functions on U. Note that $f_1^{\mathrm{an}}, \ldots, f_n^{\mathrm{an}}$ are continuous complex functions on U^{an}. Since the norm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ is a continuous function on $V_{\mathbb{C}}$, we obtain that the map

$$(x \in X^{\mathrm{an}}) \longmapsto \|s\|(x) = \|f_1^{\mathrm{an}}(x)e_1 + \cdots + f_n^{\mathrm{an}}(x)e_n\|_{\mathbb{C}}$$

is a continuous function on U^{an}. The proposition is thus proved. □

Proposition 4.3.8. — *We assume that the field k is archimedean. Let $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$ be an k-scheme and $(V, \|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over $\mathbb{R}$. For any $x \in X^{\mathrm{an}}$, let $\|\cdot\|(x)$ be the norm on $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$ induced by $\|\cdot\|$ by extension of scalars, and let $\|\cdot\|_1(x)$ be the dual norm on $V^\vee \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$ of $\|\cdot\|(x)$. Then the norms $\|\cdot\|_1(x)$, $x \in X^{\mathrm{an}}$ define a continuous metric on the vector bundle $\pi^*(V^\vee)$.*

Démonstration. — Let $(\alpha_i)_{i=1}^n$ be a basis of $V^\vee$. Locally on a Zariski open subset U of X, any element $s \in H^0(U, \pi^*(V^\vee))$ can be written in the form $s = f_1\alpha_1 + \cdots + f_n\alpha_n$, where $f_1, \ldots, f_n$ are regular functions on U. Let $\|\cdot\|'$ be the dual norm of $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ (the norm on $V_{\mathbb{C}}$ induced by $\|\cdot\|$ by extension of scalars). We claim that

$$\|s\|_1(x) = \|f_1^{\mathrm{an}}(x)\alpha_1 + \cdots + f_n^{\mathrm{an}}(x)\alpha_n\|'. \tag{4.3}$$

The equality follows from the definition of $\|\cdot\|_1(x)$ when $\kappa(x) = \mathbb{C}$. In the case where $\kappa(x) = \mathbb{R}$, the norm $\|\cdot\|_1(x)$ is the dual norm of $\|\cdot\|$. Hence it coincides with the restriction of $\|\cdot\|'$ on $V^\vee$ (see Proposition **??**), and hence the equality (4.3) also holds in this case. Since the norm $\|\cdot\|'$ is a continuous function on $V_{\mathbb{C}}^\vee$, we obtain that $\|s\|_1$ is a continuous function on U^{an}. □

Assume that the k-scheme X is proper. Then the associated Berkovich space X^{an} is compact. In particular, if E is a vector bundle on X equipped with a continuous metric φ, for any global section $s \in H^0(X, E)$, the number

$$\|s\|_{\varphi,\sup} := \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} \|s\|_\varphi(x)$$

is finite. Thus we obtain a map $\|\cdot\|_{\varphi,\sup} : H^0(X, E) \to \mathbb{R}_+$, which is actually a norm on the k-vector space $H^0(X, E)$.

4.3.2. Base change. — Let k'/k be a field extension equipped with an absolute value $|\cdot|'$ which extends $|\cdot|$ on k. We assume that k' is complete with respect to this absolute value.

Let X be a scheme over $\mathrm{Spec}\, k$, X' be the fiber product $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k'$ and $p : X' \to X$ be the projection morphism. If $(K, |\cdot|_K)$ is a valued extension of k' and $f : \mathrm{Spec}\, K \to X'$ is a k'-point of X' valued in K, then the composition morphism $\pi \circ f$ is a k-point of X valued in K. This construction is functorial and thus determines by passing to colimit a surjective map between Berkovich spaces from X'^{an} to X^{an} which we denote by $p^\natural$. We emphasize that X'^{an} is constructed from X' as a projective scheme over $\mathrm{Spec}\, k'$. Thus $p^\natural$ differs from the map between Berkovich spaces associated to p (considered as a k-morphism of schemes) as in Definition **??**.

Proposition 4.3.9. — *The map $p^\natural : X'^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ defined above is continuous with respect to the Berkovich topology.*

Démonstration. — Let U be a Zariski open subset of X and g be a regular function on U. For any $y \in X'^{\mathrm{an}}$ one has $|g|'(y) = |g|(p^\natural(y))$, where on the left hand side of the equality we consider g as a regular function on $p^{-1}(U)$. Hence $|\cdot| \circ p^\natural = |\cdot|'$ is a continuous function on $p^{-1}(U)^{\mathrm{an}}$. Therefore the map $p^\natural$ is a continuous map. □

Let E be a vector bundle on X equipped with a metric φ and let $E_{k'}$ be the pull-back of E by the projection morphism $p : X' \to X$. If y is a point of X'^{an} and if $x = p^\natural(y)$, then the norm $\|\cdot\|(x)$ on $E(x) = E \otimes \widehat{\kappa}(x)$ induces by extension of scalars a norm on $E_{k'}(y) \cong E(x) \otimes_{\widehat{\kappa}(x)} \widehat{\kappa}(y)$, denoted by $\|\cdot\|_{\varphi_{k'}}(y)$. These norms defines a metric on $E_{k'}$, denoted by $\varphi_{k'}$, called the metric *induced by* φ by extension of scalars.

Proposition 4.3.10. — *Let L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module equipped with a continuous metric φ. Then the metric $\varphi_{k'}$ is continuous.*

Démonstration. — Let U be a Zariski open subset of X on which the invertible sheaf L is trivialized by a section $s_0 \in H^0(U, L)$. Then $p^*(s_0)$ is a section in $H^0(p^{-1}(U), L_{k'})$ which trivializes $L_{K'}$ on $p^{-1}(U)$. one has $\|p^*(s_0)\|_{\varphi_{k'}} = \|s_0\|_\varphi \circ p^\natural|_{p^{-1}(U)^{\mathrm{an}}}$. By Proposition 4.3.9, we obtain that $\|p^*(s_0)\|_{\varphi_{k'}}$ is a continuous function on $p^{-1}(U)^{\mathrm{an}}$. □

4.3.3. Metrics on invertible sheaves. — Let X be a scheme over $\operatorname{Spec} k$. In this subsection, we discuss constructions and properties of metrics on invertible $\mathcal{O}_X$-modules.

Let L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module and φ be a metric on L. Note that for any $x \in X^{\mathrm{an}}$, the norm $\|\cdot\|_\varphi(x)$ is determined by its value on any non-zero element of $L \otimes \widehat{\kappa}(x)$. In particular, to verify that the metric φ is continuous, it suffices to prove that there exists a covering $(U_i)_{i \in I}$ of X by affine open subsets and for each $i \in I$ there exists a section $s \in H^0(U_i, L)$ which trivializes the invertible sheaf L on U_i such that the function $\|s\|_\varphi$ is continuous on U_i^{an}.

Proposition 4.3.11. — *Let X be a proper scheme over* $\operatorname{Spec} k$ *and L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. There exists a continuous metric on L.*

Démonstration. — We choose a Zariski open covering $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ such that L is trivialized on each U_i by a section $s_i \in H^0(U_i, L)$. We construct a continuous metric φ_i on $L|_{U_i}$ such that $\|s_i\|_{\varphi_i} = 1$ on U_i^{an}. As X^{an} is a paracompact topological space, we can find a partition of the unity into the sum of continuous functions $\rho_1, \ldots, \rho_n$ on X^{an} such that $\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U_i^{\mathrm{an}}$ for any i. We can then construct a continuous metric φ on L as follows. For any section s of L on a Zariski open subset U of X, which is written as $s = a_i s_i$ on $U \cap U_i$, we let

$$\|s\|_\varphi = \sum_{i=1}^n \rho_i |a_i| \cdot \|s_i\|_{\varphi_i}.$$

We then obtain a continuous metric φ on L. □

Définition 4.3.12. — Let L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. If φ is a metric on L, then the dual $\mathcal{O}_X$-module $L^\vee$ is naturally equipped with a metric $\varphi^\vee$ such that, for sections α and s of $L^\vee$ and L over a Zariski open subset U of X, one has

$$|\alpha(s)| = \varphi(s) \cdot \varphi^\vee(\alpha).$$

We call $\varphi^\vee$ the *dual metric* of φ and we also use the expression $-\varphi$ to denote the metric $\varphi^\vee$.

Proposition 4.3.13. — *Let X be a k-scheme, L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module and φ be a metric on L. If φ is a continuous metric, then $\varphi^\vee$ is also continuous.*

Démonstration. — Let U be a Zariski open subset of X on which the invertible sheaves L and $L^\vee$ trivialize by sections $s \in \Gamma(U, L)$ and $\alpha \in \Gamma(U, L^\vee)$ respectively. Then $\alpha(s)$ is a rational function, and

$$\|\alpha\|_{\varphi^\vee} = \frac{|\alpha(s)|}{\|s\|_\varphi}$$

on U^{an}. Since the functions $|\alpha(s)|$ and $\|s\|_\varphi$ are all continuous, also is $\|\alpha\|_{\varphi^\vee}$. Since U is arbitrary, we obtain that $\varphi^\vee$ is a continuous metric. □

Définition 4.3.14. — Let L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module and $n \geqslant 1$ be an integer. Suppose given a metric φ on $L^{\otimes n}$. Then the maps

$$(s \in H^0(U, L)) \longmapsto \varphi(s^n)^{1/n},$$

with U running over the set of all Zariski open subsets of X, defines a metric on L, denoted by $\frac{1}{n}\varphi$. If the metric φ is continuous, then also is $\frac{1}{n}\varphi$.

Définition 4.3.15. — Suppose given two invertible $\mathcal{O}_X$-modules L_1 and L_2, equipped with metrics φ_1 and φ_2 respectively. We denote by $\varphi_1 + \varphi_2$ the metric on $L_1 \otimes L_2$ such that, for any Zariski open subset U of X and all sections $s_1 \in H^0(U, L_1)$, $s_2 \in H^0(U, L_2)$, one has

$$\forall\, x \in U^{\mathrm{an}},\ \|s_1 \cdot s_2\|_{\varphi_1+\varphi_2}(x) = \|s_1\|_{\varphi_1}(x) \cdot \|s_2\|_{\varphi_2}(x).$$

Note that, if the metrics φ_1 and φ_2 are continuous, then also is $\varphi_1 + \varphi_2$. We also use the expression $\varphi_1 - \varphi_2$ to denote the metric $\varphi_1 + \varphi_2^\vee$ on $L_1 \otimes L_2^\vee$. If L is an invertible $\mathcal{O}_X$-module equipped with a metric φ, for any integer $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, we use the expression $n\varphi$ to denote the metric $\varphi + \cdots + \varphi$ (n copies) on $L^{\otimes n}$.

Let φ be a metric on $\mathcal{O}_X$. Then $-\ln \|\mathbf{1}\|_\varphi$ is a function on X^{an}, where $\mathbf{1}$ denotes the section of unity of $\mathcal{O}_X$. If φ is a continuous metric, then $-\ln \|\mathbf{1}\|_\varphi$ is a continuous function. Conversely, any real-valued function g on X^{an} determines a metric on $\mathcal{O}_X$ such that the norm at $x \in X^{\mathrm{an}}$ of the section of unity of $\mathcal{O}_X$ is $\mathrm{e}^{-g(x)}$. The metric is continuous if the function g is continuous. Therefore the set of all metrics on $\mathcal{O}_X$

is canonically in bijection with the set of all real-valued function on X^{an}. This correspondance also maps bijectively the set of all continuous metrics on $\mathcal{O}_X$ to the set $C^0(X^{\mathrm{an}})$ of all continous real-valued functions on X^{an}.

Définition 4.3.16. — Let L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. If φ and φ' are two metrics on L, then $\varphi' - \varphi$ is a metric on $L \otimes L^\vee \cong \mathcal{O}_X$, hence corresponds to a real valued function on X^{an}. By abuse of notation, we use the expression $\varphi' - \varphi$ to denote this function. We say that the metric φ' is *larger* than φ if $\varphi' - \varphi$ is a non-negative function; we use the expression $\varphi' \geqslant \varphi$ or $\varphi \leqslant \varphi'$ to denote the relation "φ' *is larger than* φ". If φ and φ' are metrics on L, we denote by $d(\varphi, \varphi')$ the element

$$\sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} |\varphi' - \varphi|(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

called the *distance* between φ and φ'. Note that one has

$$d(\varphi, \varphi') = \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} \big| \ln \|\cdot\|_{\varphi}(x) - \ln \|\cdot\|_{\varphi'}(x) \big|. \tag{4.4}$$

Note that one has (see §**??** for the notion of distance between two norms)

$$d(\|\cdot\|_{\varphi,\sup}, \|\cdot\|_{\varphi',\sup}) \leqslant d(\varphi, \varphi'), \tag{4.5}$$

provided that the k-scheme X is proper (so that the sup norms are well defined). Moreover, for any integer $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ one has $n\varphi' - n\varphi = n(\varphi' - \varphi)$ and hence

$$d(n\varphi', n\varphi) = nd(\varphi', \varphi). \tag{4.6}$$

The distance function verifies the triangle inequality : if φ_1, φ_2 and φ_3 are three continuous metrics on L, then one has

$$d(\varphi_1, \varphi_3) \leqslant d(\varphi_1, \varphi_2) + d(\varphi_2, \varphi_3). \tag{4.7}$$

Définition 4.3.17. — Let X and Y be two schemes over $\operatorname{Spec} k$, and $f : X \to Y$ be a k-morphism. Suppose give an invertible $\mathcal{O}_Y$-module L, equipped with a metric φ. Then the metric φ induces by pull-back a metric $f^*(\varphi)$ on X such that, for any $x \in X^{\mathrm{an}}$, the norm $\|\cdot\|_{f^*(\varphi)}(x)$ is induced by $\|\cdot\|_{\varphi}(f(x))$ by extension of scalars. For any section s of L on a Zariski open subset U of Y, one has

$$\|f^*(s)\|_{f^*(\varphi)} = \|s\|_{\varphi} \circ f^{\mathrm{an}}|_{f^{-1}(U)^{\mathrm{an}}}. \tag{4.8}$$

In particular, if the metric φ is continous, then also is $f^*(\varphi)$.

Proposition 4.3.18. — *Let X and Y be two schemes over* $\operatorname{Spec} k$*, $f : X \to Y$ be a k-morphism, L be an invertible $\mathcal{O}_Y$-module, and φ and φ' be two metrics on L. Then one has*

$$d(f^*(\varphi), f^*(\varphi')) \leqslant d(\varphi, \varphi').$$

Démonstration. — By (4.8), one has $f^*(\varphi) - f^*(\varphi') = (\varphi - \varphi') \circ f^{\mathrm{an}}$. Hence

$$d(f^*(\varphi), f^*(\varphi')) = \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} |f^*(\varphi) - f^*(\varphi')|(x) \leqslant \sup_{y \in Y^{\mathrm{an}}} |\varphi - \varphi'|(y) = d(\varphi, \varphi').$$

□

Proposition 4.3.19. — *Let X be a projective scheme over* $\operatorname{Spec} k$*, L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module, and φ be a continuous metric on L. If n and m are two integers in $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, and s_n and s_m are elements in $H^0(X, L^{\otimes n})$ and $H^0(X, L^{\otimes m})$ respectively, then the following inequality holds*

$$\|s_n \cdot s_m\|_{(n+m)\varphi,\sup} \leqslant \|s_n\|_{n\varphi,\sup} \cdot \|s_m\|_{m\varphi,\sup}. \tag{4.9}$$

Démonstration. — By definition, one has

$$\|s_n \cdot s_m\|_{(n+m)\varphi,\sup} = \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} \Big(\|s_n\|_{n\varphi}(x) \cdot \|s_m\|_{m\varphi}(x) \Big).$$

Since for any $x \in X^{\mathrm{an}}$ one has

$$\|s_n\|_{n\varphi}(x) \leqslant \|s_n\|_{n\varphi,\sup} \text{ and } \|s_m\|_{m\varphi}(x) \leqslant \|s_m\|_{m\varphi,\sup},$$

we obtain the inequality (4.9). □

4.3.4. Fubini-Study metric. — Let V be a finite dimensional vector space over k. We denote by $\pi : \mathbb{P}(V) \to \operatorname{Spec}(k)$ the projective space of V. Note that the functor (from the category $\mathbf{A}_k$ of k-algebras to the category of sets) corresponding to $\mathbb{P}(V)$ sends any k-algebra A to the set of all projective quotient A-modules of $V \otimes_k A$ which are of rank 1. By gluing morphisms of schemes, we obtain that, for any k-scheme $f : X \to \operatorname{Spec}(k)$, the set of all k-morphisms from X to $\mathbb{P}(V)$ is in functorial bijection with the set of all invertible quotient $\mathcal{O}_X$-module of $f^*(V)$. In the case where X is the projective space $\mathbb{P}(V)$, the invertible quotient $\mathcal{O}_X$-module of $\pi^*(V)$ corresponding to the identity map $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ is called the *universal invertible sheaf*, denoted by $\mathcal{O}_V(1)$. It verifies the following universal property : for any k-scheme $f : X \to \operatorname{Spec} k$, a k-morphism $g : X \to \mathbb{P}(V)$ corresponds to the invertible quotient

$$g^*(p) : g^*(\pi^*(V)) \cong f^*(V) \longrightarrow g^*(\mathcal{O}_V(1)),$$

where $p : \pi^*(V) \to \mathcal{O}_V(1)$ is the quotient homomorphism defining the universal invertible sheaf.

Assume that the vector space V is equipped with a norm $\|\cdot\|$. For any point x in the Berkovich space $\mathbb{P}(V)^{\mathrm{an}}$, the norm $\|\cdot\|$ induces by extension of scalars a norm $\|\cdot\|(x)$ on $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$. We denote by $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}(x)$ the quotient norm on $\mathcal{O}_V(1)(x) = \mathcal{O}_V(1) \otimes \widehat{\kappa}(x)$ induced by the norm $\|\cdot\|(x)$ on $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$, called the *Fubini-Study norm* on $\mathcal{O}_V(1)(x)$ induced by $\|\cdot\|$.

Proposition 4.3.20. — *Let $(V, \|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over k. Then the norms $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}(x)$, $x \in X^{\mathrm{an}}$ described above define a continuous metric on the universal invertible sheaf $\mathcal{O}_V(1)$.*

Démonstration. — By Proposition **??** (see also Remark **??**), for any $x \in X^{\mathrm{an}}$, the norms $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|^{**}$ induce the same Fubini-Study norm on $\mathcal{O}_V(1)(x)$. Hence we may assume without loss of generality that the norm $\|\cdot\|$ is ultrametric when $(k,|\cdot|)$ is non-archimedean.

For any $x \in X^{\mathrm{an}}$, let $\|\cdot\|(x)$ be the norm on $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$ induced by $\|\cdot\|$ by extension of scalars, and let $\|\cdot\|'(x)$ be the dual norm of $\|\cdot\|(x)$. The norms $\|\cdot\|'(x)$ define a metric φ on $\pi^*(V^\vee)$. By Proposition **??**, if the field $(k,|\cdot|)$ is non-archimedean, then the norm $\|\cdot\|'(x)$ coincides with the norm induced by $\|\cdot\|^*$ by extension of scalars. Therefore, by Proposition 4.3.7, we obtain that the metric φ is continuous. If the field $(k,|\cdot|)$ is archimedean, then it follows from Proposition 4.3.8 that the metric φ is also continuous.

The dual norm of the Fubini-Study norm $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}(x)$ then concides with the restriction of $\|\cdot\|'(x)$ on $\mathcal{O}_V(1)^\vee \otimes \widehat{\kappa}(x)$. Hence these dual norms (for $x \in X^{\mathrm{an}}$) form a continuous metric on $\mathcal{O}_V(1)^\vee$. Therefore the Fubini-Study norms $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}(x)$, $x \in X^{\mathrm{an}}$ define a continuous metric on $\mathcal{O}_V(1)$ (see Proposition 4.3.13). □

Définition 4.3.21. — Let $(V,\|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over k. The continuous metric on $\mathcal{O}_V(1)$ formed by the Fubini-Study norms $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}(x)$, $x \in X^{\mathrm{an}}$ is called the *Fubini-Study metric* on $\mathcal{O}_V(1)$ associated to the norm $\|\cdot\|$ on V.

Let $f : X \to \operatorname{Spec} k$ be a projective k-scheme and L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. Suppose given a finite dimensional vector space V over k and a surjective homomorphism $\beta : f^*(V) \to L$. Then the homomorphism β corresponds to a k-morphism of schemes $g : X \to \mathbb{P}(V)$ such that $g^*(\mathcal{O}_V(1))$ is canonical isomorphic to L. If V is equipped with a norm $\|\cdot\|$, then the Fubini-Study metric on $\mathcal{O}_V(1)$ induces by pull-back a continuous metric on L, called the *quotient metric* induced by the normed vector space $(V,\|\cdot\|)$ and the surjective homomorphism β.

Proposition 4.3.22. — *Let $f : X \to \operatorname{Spec} k$ be a projective scheme over* $\operatorname{Spec} k$ *and L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. Let V be a finite dimensional vector space and $\beta : f^*(V) \to L$ be a surjective homomorphism. If $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|'$ are two norms on V and if φ and φ' are quotient metrics on L induced by $(V,\|\cdot\|)$ and $(V,\|\cdot\|')$ (and the surjective homomorphism β) respectively, then one has $d(\varphi,\varphi') \leqslant d(\|\cdot\|,\|\cdot\|')$.*

Démonstration. — Let x be a point of X^{an}, $\|\cdot\|(x)$ and $\|\cdot\|'(x)$ be the norms on $V \otimes \widehat{\kappa}(x)$ induced by $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|'$ by extension of scalars. Proposition **??** leads to

$$d(\|\cdot\|(x),\|\cdot\|'(x)) \leqslant d(\|\cdot\|,\|\cdot\|').$$

Since $\|\cdot\|_\varphi(x)$ and $\|\cdot\|_{\varphi'}(x)$ are respectively the quotient norms of $\|\cdot\|(x)$ and $\|\cdot\|'(x)$, by Proposition **??** one has

$$d(\|\cdot\|_\varphi(x),\|\cdot\|_{\varphi'}(x)) \leqslant d(\|\cdot\|(x),\|\cdot\|'(x)).$$

Therefore
$$d(\varphi,\varphi')=\sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} d(\|\cdot\|(x),\|\cdot\|'(x))\leqslant d(\|\cdot\|,\|\cdot\|').$$
□

Remarque 4.3.23. — There is a fundamental difference between $\mathbb{R}$ and other complete field in the consideration of quotient metrics, which we explain as follows.

Let $(V,\|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over k, X be a closed subscheme of V and L be the restriction of the universal invertible sheaf $\mathcal{O}_V(1)$ on X. We assume that the norm $\|\cdot\|$ is ultrametric in the case where $|\cdot|$ is non-archimedean. If $(k,|\cdot|)$ is not the field $\mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value, then the quotient metric on L can be computed by using only vectors in V (see Proposition **??**). In particular, if V' is a quotient vector space of V such that X is contained in $\mathbb{P}(V)$ and if $\|\cdot\|'$ is the quotient norm on V' induced by $\|\cdot\|$, then the quotient metric on L induced by $(V,\|\cdot\|)$ coincides with that induced by $(V',\|\cdot\|')$ (see Corollary **??**).

Assume that $(k,|\cdot|)$ is the field $\mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value. Let $(V,\|\cdot\|)$ be a finite dimensional normed vector space over $\mathbb{R}$ and V' be a quotient vector space of V, equipped with the quotient norm $\|\cdot\|'$. Let X be a closed subsceme of $\mathbb{P}(V')$ and L be the restriction of $\mathcal{O}_{V'}(1)$ on X. Note that X can also be viewed as a closed subscheme of $\mathbb{P}(V)$ and L identifies with the restriction of $\mathcal{O}_V(1)$. Let φ and φ' be quotient metrics on L induced by $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|'$ respectively, then by Remark **??** (see also Proposition 4.3.22) one has $d(\varphi,\varphi')\leqslant\ln(2)$.

Définition 4.3.24. — Let $\pi: X\to\operatorname{Spec}(k)$ be a projective k-scheme, L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module, which is generated by global sections, and φ be a continuous metric on L. Let $n\geqslant 1$ be an integer. If $(k,|\cdot|)$ is non-archimedean or if $k=\mathbb{C}$ equipped with the usual absolute value, we denote by φ_n the quotient metric on $L^{\otimes n}$ induced by the normed vector space $(H^0(X,L^{\otimes n}),\|\cdot\|_{n\varphi,\sup})$ and the canonical surjective homomorphism $\pi^*(H^0(X,L^{\otimes n}))\to L^{\otimes n}$.

Assume that $k=\mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value. Let $X_{\mathbb{C}}$ be the fiber product $X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{R}}\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ and $L_{\mathbb{C}}$ be the pull-back of L on $X_{\mathbb{C}}$. The metric φ induces by pull-back a continuous metric $\varphi_{\mathbb{C}}$ on $L_{\mathbb{C}}$. We denote by $\varphi_{n,\mathbb{C}}$ the quotient metric on $L_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ induced by the normed vector space $(H^0(X_{\mathbb{C}},L_{\mathbb{C}}^{\otimes n}),\|\cdot\|_{n\varphi_{\mathbb{C}},\sup})$. The metric $\varphi_{n,\mathbb{C}}$ is invariant under the action of the complex conjugation, therefore descends to a continuous metric on L, which we denote by φ_n.

Proposition 4.3.25. — *Let $\pi: X\to\operatorname{Spec}k$ be a projective k-scheme and L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module generated by global sections, equipped with a continuous metric φ. Then the following assertions hold.*

(1) *For any integer $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, one has $\varphi_n\geqslant n\varphi$.*

(2) *The sup norm $\|\cdot\|_{\varphi_n,\sup}$ on V_n induced by φ_n coincides with $\|\cdot\|_{n\varphi,\sup}$.*

(3) *For any pair (m,n) of positive integers one has $\varphi_{n+m}\leqslant\varphi_n+\varphi_m$.*

(4) *For any integer $n \geqslant 1$, one has $d(\varphi_n, n\varphi) \leqslant nd(\varphi_1, \varphi)$. In particular, if $\varphi_1 = \varphi$ then $\varphi_n = n\varphi$ for any $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.*

(5) *Let φ' be another continuous metric on L. Then one has $d(\varphi_n, \varphi'_n) \leqslant nd(\varphi, \varphi')$ for any $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.*

Démonstration. — (1) Let x be a point of X^{an} and ℓ be an element of $L^{\otimes n} \otimes \widehat{\kappa}(x)$. In the case where k is not the field of real numbers with the usual absolute value, by Proposition **??**, one has

$$\|\ell\|_{\varphi_n}(x) = \inf_{\substack{s \in V_n,\, \lambda \in \widehat{\kappa}(x)^{\times},\\ s(x) = \lambda\ell}} |\lambda|_x^{-1} \|s\|_{n\varphi,\sup}.$$

Since for any $s \in V_n$, one has $\|s\|_{n\varphi}(x) \leqslant \|s\|_{n\varphi,\sup}$, we obtain $\|\ell\|_{\varphi_n}(x) \geqslant \|\ell\|_{n\varphi}(x)$.

In the case where $k = \mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value, one also has

$$\|\ell\|_{\varphi_n}(x) = \inf_{s \in V_{n,\mathbb{C}},\, s(x) = \ell} \|s\|_{n\varphi_{\mathbb{C}},\sup} \geqslant \|\ell\|_{n\varphi}(x).$$

(2) By (1), one has $\|\cdot\|_{\varphi_n,\sup} \geqslant \|\cdot\|_{n\varphi,\sup}$. In the following, we prove the converse inequality. We first assume that k is not the field of real numbers with the usual absolute value. If s is a global section of $L^{\otimes n}$, for any $x \in X^{\mathrm{an}}$, by Proposition **??** one has

$$\|s\|_{\varphi_n}(x) = \inf_{\substack{t \in V_n,\, \lambda \in \widehat{\kappa}(x)^{\times}\\ t(x) = \lambda s(x)}} |\lambda|_x^{-1} \|t\|_{n\varphi,\sup} \leqslant \|s\|_{n\varphi,\sup}.$$

Hence

$$\|s\|_{\varphi_n,\sup} = \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} \|s\|_{\varphi_n}(x) \leqslant \|s\|_{n\varphi,\sup}.$$

In the following, we assume that $k = \mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value. Then for any $x \in X^{\mathrm{an}}$ and any global section s of $L^{\otimes n}$, one has

$$\|s\|_{\varphi_n}(x) = \inf_{\substack{t \in V_{n,\mathbb{C}}\\ t(x) = s(x)}} \|t\|_{n\varphi_{\mathbb{C}},\sup} \leqslant \|s\|_{n\varphi_{\mathbb{C}},\sup} = \|s\|_{n\varphi,\sup},$$

where the last equality comes from the fact that s belongs to V_n. Therefore the inequality $\|s\|_{\varphi_n,\sup} \leqslant \|s\|_{n\varphi,\sup}$ also holds.

(3) Let x be a point of X^{an}, ℓ_n and ℓ_m be elements of $L^{\otimes n} \otimes \widehat{\kappa}(x)$ and $L^{\otimes m} \otimes \widehat{\kappa}(x)$ respectively. We first assume that k is not the field of real numbers with the usual absolute value. By Proposition **??** one has

$$\begin{aligned}
\|\ell_n \cdot \ell_m\|_{\varphi_{n+m}}(x) &= \inf_{\substack{s \in V_{n+m},\, \lambda \in \widehat{\kappa}(x)^{\times}\\ s(x) = \lambda \ell_n \cdot \ell_m}} |\lambda|_x^{-1} \|s\|_{(n+m)\varphi,\sup} \\
\leqslant \inf_{\substack{(s_n, s_m) \in V_n \times V_m\\ (\mu,\eta) \in (\widehat{\kappa}(x)^{\times})^2\\ s_n(x) = \mu\ell_n,\, s_m(x) = \eta\ell_m}} &|\mu\eta|^{-1} \|s_n \cdot s_m\|_{(n+m)\varphi,\sup} \leqslant \|\ell_n\|_{\varphi_n}(x) \cdot \|\ell_m\|_{\varphi_m}(x),
\end{aligned}$$

where the last inequality comes from (4.9) and Proposition **??**.

The case where $k = \mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value is quite similar. One has

$$\|\ell_n \cdot \ell_m\|_{\varphi_{n+m}}(x) = \inf_{\substack{s \in V_{n+m,\mathbb{C}} \\ s(x) = \ell_n \cdot \ell_m}} \|s\|_{(n+m)\varphi_{\mathbb{C}},\sup}$$
$$\leqslant \inf_{\substack{(s_n, s_m) \in V_{n,\mathbb{C}} \times V_{m,\mathbb{C}} \\ s_n(x) = \ell_n,\, s_m(x) = \ell_m}} \|s_n \cdot s_m\|_{(n+m)\varphi_{\mathbb{C}},\sup}$$
$$\leqslant \inf_{\substack{(s_n, s_m) \in V_{n,\mathbb{C}} \times V_{m,\mathbb{C}} \\ s_n(x) = \ell_n,\, s_m(x) = \ell_m}} \|s_n\|_{n\varphi_{\mathbb{C}},\sup} \cdot \|s_m\|_{m\varphi_{\mathbb{C}},\sup} = \|\ell_n\|_{\varphi_n}(x) \cdot \|\ell_m\|_{\varphi_m}(x).$$

(4) By (3), one has $\varphi_n \leqslant n\varphi_1$. Moreover, by (1), one has $\varphi_n \geqslant n\varphi$ and $\varphi_1 \geqslant \varphi$. Hence

$$0 \leqslant \varphi_n - n\varphi \leqslant n\varphi_1 - n\varphi = n(\varphi_1 - \varphi),$$

which implies

$$d(\varphi_n, n\varphi) = \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} (\varphi_n - n\varphi)(x) \leqslant n \sup_{x \in X^{\mathrm{an}}} (\varphi_1 - \varphi)(x) = nd(\varphi_1, \varphi).$$

(5) By (4.6), it suffices to verify the case where $n = 1$. If k is not the field of real numbers equipped with the usual absolute value, by Proposition 4.3.22 one has

$$d(\varphi_1, \varphi_1') \leqslant d(\|\cdot\|_{\varphi,\sup}, \|\cdot\|_{\varphi',\sup}),$$

which is bounded from above by $d(\varphi, \varphi')$. Similarly, if $k = \mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value, then one has

$$d(\varphi_1, \varphi_1') = d(\varphi_{1,\mathbb{C}}, \varphi_{1,\mathbb{C}}') \leqslant d(\|\cdot\|_{\varphi_{\mathbb{C}},\sup}, \|\cdot\|_{\varphi_{\mathbb{C}}',\sup}) \leqslant d(\varphi_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}}') = d(\varphi, \varphi').$$

□

Proposition 4.3.26. — *Let $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$ be a projective k-scheme and L be an invertible $\mathcal{O}_X$-module. Suppose given a normed vector space $(V, \|\cdot\|)$, and a surjective homomorphisms $\beta : \pi^*(V) \to L$. Let φ be the quotient metric on L induced by $(V, \|\cdot\|)$ and β. Then, for any integer $n \geqslant 1$, one has $\varphi_n = n\varphi$.*

Démonstration. — By Proposition 4.3.25(4), it suffices to verify that $\varphi_1 = \varphi$. Note that $\varphi_1 \geqslant \varphi$ (by Proposition 4.3.25(1)). In the following, we prove the converse inequality.

Let x be a point of X^{an} and ℓ be an element of $L \otimes \widehat{\kappa}(x)$. We first assume that k is not the field of real numbers equipped with the usual absolute value. By Proposition **??**, one has

$$\|\ell\|_{\varphi_1}(x) = \inf_{\substack{s \in H^0(X,L) \\ \lambda \in \widehat{\kappa}(x)^{\times} \\ s(x) = \lambda\ell}} |\lambda|_x^{-1} \cdot \|s\|_{\varphi,\sup} \leqslant \inf_{\substack{s' \in V,\, \lambda \in \widehat{\kappa}(x)^{\times} \\ f(s')(x) = \lambda\ell}} |\lambda|_x^{-1} \cdot \|f(s')\|_{\varphi,\sup},$$

where $f : V \to H^0(X, L)$ is the adjoint homomorphism of $\beta : \pi^*(V) \to L$. Note that for any $s' \in V$ and any $y \in X^{\mathrm{an}}$ one has (by Proposition **??** again)

$$\|f(s')\|_\varphi(y) = \inf_{\substack{t\in V,\, \lambda\in\widehat{\kappa}(y)^\times\\ f(t)(y)=\lambda f(s')(y)}} |\lambda|_x^{-1} \cdot \|t\| \leqslant \|s'\|,$$

which implies $\|f(s')\|_{\varphi,\sup} \leqslant \|s'\|$. Therefore one obtains

$$\|\ell\|_{\varphi_1}(x) \leqslant \inf_{\substack{s'\in V,\, \lambda\in\widehat{\kappa}(x)^\times\\ f(s')(x)=\lambda\ell}} |\lambda|_x^{-1} \cdot \|s'\| = \|\ell\|_\varphi(x).$$

Therefore one has $\varphi_1 = \varphi$.

In the following, we assume that $k = \mathbb{R}$ equipped with the usual absolute value. By proposition **??**, the metric $\varphi_{\mathbb{C}}$ is the quotient metric induced by $(V_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ and $\beta_{\mathbb{C}} : \pi^*_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) \to L_{\mathbb{C}}$. By the complex case of the proposition established above, one has $\varphi_{\mathbb{C},1} = \varphi_{\mathbb{C}}$. Moreover, by definition one has $\varphi_{\mathbb{C},1} = \varphi_{1,\mathbb{C}}$. Hence we obtain $\varphi_1 = \varphi$. □

4.4. Fonction de Green

Soit X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} k$. Rappelons que tout ouvert Zariski non-vide de X^{an} est dense pour la topologie analytique (cf. [**?**, proposition 3.4.5]). On désigne par $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ l'espace des fonctions continues sur un ouvert Zariski non-vide de X^{an}. Si deux fonctions f et g dans $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ sont égales sur un ouvert Zariski non-vide, on dit que f et g sont équivalentes, noté comme $f \sim g$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$. On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ l'espace quotient de $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ par cette relation d'équivalence. L'addition et la multiplication de fonctions induisent naturellement une structure de $\mathbb{R}$-algèbre sur $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$. Si U est un ouvert Zariski non-vide de X, l'application d'inclusion de $\mathcal{C}^0(U^{\mathrm{an}})$ dans $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ induit un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathcal{C}^0(U^{\mathrm{an}})$ vers $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$. Cet homomorphisme est injectif (car tout ouvert Zariski non-vide de X^{an} est dense pour la topologie analytique), et donc permet, dans le cas nécessaire, de considérer une fonction de $\mathcal{C}^0(U^{\mathrm{an}})$ comme un élément de $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ par abus de notation. Si un élément de $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ appartient à l'image de cet homomorphisme, on dit qu'il s'*étend* (de façon unique) en une fonction continue sur U^{an}.

Soit D un diviseur de Cartier sur X. On appelle *fonction de Green* de D tout élément $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ tel que, pour toute fonction rationnelle f sur X qui définit le diviseur D sur un ouvert Zariski non-vide U, l'élément $g + \ln|f| \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend en une fonction continue sur U^{an}. Par définition, si $D = (f)$ est un diviseur principal, où f est une fonction rationnelle sur X, alors la fonction $-\ln|f|$ est une fonction de Green du diviseur de Cartier D. Si D est le diviseur de Cartier trivial, qui est défini par la fonction rationnelle de l'unité sur X, alors les fonctions de Green de D sont précisément les éléments de $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ qui s'étendent en des fonctions continues sur X.

Les fonctions de Green sont étroitement liées aux métriques continues sur les fibrés inversibles. Soient L un fibré inversible sur X muni d'une métrique continue et s une section rationnelle non-nulle de L. Alors la fonction $-\ln\|s\|$, qui est bien définie et continue en dehors des lieux de zéro et de pôle de s, est une fonction de Green du diviseur (s). Réciproquement, si D est un diviseur de Cartier sur X et si g est une fonction de Green de D, alors pour toute fonction rationnelle f sur X qui définit le diviseur D sur un ouvert Zariski non-vide U, l'élément $f^{-1}s_D$ est une section trivialisante de $\mathcal{O}_X(D)$ sur U. L'élément $-(g+\ln|f|)$ s'étend en une fonction continue sur U^{an} dont l'exponentielle est notée comme $\|f^{-1}s_D\|_g$. On obtient ainsi une métrique continue $\|.\|_g$ sur $\mathcal{O}_X(D)$ telle que $g=-\ln\|s_D\|_g$ dans $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$.

On désigne par $\widehat{\mathrm{Div}}(X)$ l'ensemble des couples de la forme (D,g), où D est un diviseur de Cartier sur X et g est une fonction de Green de D. Il s'avère que, si D_1 et D_2 sont des diviseurs de Cartier sur X, et g_1 et g_2 sont des fonctions de Green de D_1 et D_2 respectivement, alors g_1+g_2 est une fonction de Green de D_1+D_2. En particulier, l'espace $\widehat{\mathrm{Div}}(X)$ forme un groupe commutatif par rapport à la loi d'addition $((D_1,g_1),(D_2,g_2))\mapsto(D_1+D_2,g_1+g_2)$.

Plus généralement, si D est un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X, on appelle *fonction de Green* de D tout élément $g\in\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ qui peut s'écrire sous la forme $g=\lambda_1g_1+\cdots+\lambda_ng_n$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des nombres réelles, chaque g_i est une fonction de Green d'un diviseur de Cartier D_i, tels que

$$\lambda_1D_1+\cdots+\lambda_nD_n=D.$$

Les couples de la forme (D,g), où D est un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X et g est une fonction de Green de D, forment un espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ que l'on note comme $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$. Cet espace vectoriel s'identifie au quotient de $\widehat{\mathrm{Div}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $\lambda(D,g)-(\lambda D,\lambda g)$, où $(D,g)\in\widehat{\mathrm{Div}}(X)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. En particulier, si D est un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X, g est une fonction de Green de D, et φ est une fonction continue sur X^{an}, alors $g+\varphi$ est aussi une fonction de Green de D (on peut considérer φ comme une fonction de Green du $\mathbb{R}$-diviseur trivial).

Proposition 4.4.1. — *Si D est le $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier trivial sur X et g est une fonction de Green sur D, alors l'élément $g\in\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend en une fonction continue sur X^{an}.*

Démonstration. — Par définition il existe des éléments $(D_1,g_1),\ldots,(D_n,g_n)$ dans $\widehat{\mathrm{Div}}(X)$ et des nombres réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\lambda_1D_1+\cdots+\lambda_nD_n=0$ et que $g=\lambda_1g_1+\cdots+\lambda_ng_n$. On peut alors choisir un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts Zariski, stable par intersection et tel que, pour chaque $U\in\mathcal{U}$, il existe une famille $f_1,\ldots,f_n$ de fonctions rationnelles sur X, qui définissent $D_1,\ldots,D_n$ sur U respectivement, et vérifient $f_1^{\lambda_1}\cdots f_n^{\lambda_n}\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X^{\times})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ (où la structure de $\mathbb{R}$-module est notée multiplicativement), qui implique $|f_1|^{\lambda_1}\cdots|f_n|^{\lambda_n}=1$. Par définition, chaque élément $g_i + \ln|f_i|$ s'étend en une fonction continue sur U^{an}. On en déduit que

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i + \ln|f_i|)$$

s'étend aussi (de façon unique) en une fonction continue sur U^{an}. Par recollement on obtient que la fonction g s'étend en une fonction continue sur X^{an}. □

La proposition 4.4.1 montre en particulier que, si (D, g) est un élément de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$, alors pour n'import quelle décomposition $D = \lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n$ de D en combinaison linéaire de diviseurs de Cartier $D_1, \ldots, D_n$, il existe des fonctions de Green $g_1, \ldots, g_n$ de $D_1, \ldots, D_n$ respectivement, telles que $g = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$. En effet, sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_n \neq 0$. Si on choisit arbitrairement des fonctions de Green $g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n'$ de $D_1, \ldots, D_n$ respectivement, alors

$$g - \lambda_1 g_1 - \cdots - \lambda_{n-1} g_{n-1} - \lambda_n g_n'$$

est une fonction de Green du $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier trivial, donc s'étend en une fonction continue φ sur X^{an}. Par conséquent $g_n = g_n' + \lambda_n^{-1} \varphi$ est une fonction de Green de D_n et on a $g = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$.

Remarque 4.4.2. — Soient D un diviseur de Cartier effectif sur X muni d'une fonction de Green g. Localement sur un ouvert U, le diviseur D est défini par une fonction régulière f. L'élément $g + \ln|f|$ dans $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend de façon unique en une fonction continue sur U. On en déduit que la fonction $\mathrm{e}^{-g} = |f| \cdot \mathrm{e}^{-(g + \ln|f|)}$ s'étend de façon unique en une fonction continue sur U. Par recollement on obtient que l'élément $\mathrm{e}^{-g} \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend en une fonction continue sur X^{an}. Plus généralement, si D est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif muni d'une fonction de Green g, alors il existe des diviseurs de Cartier effectifs $D_1, \ldots, D_n$, des fonctions de Green $g_1, \ldots, g_n$ de $D_1, \ldots, D_n$ respectivement, ainsi que des nombres positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$(D, g) = \lambda_1 (D_1, g_1) + \cdots + \lambda_n (D_n, g_n).$$

L'élément e^{-g} dans $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend donc en une fonction continue sur X^{an}, qui est égale à $\mathrm{e}^{-\lambda_1 g_1 - \cdots - \lambda_n g_n}$. On en déduit que $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\mathrm{an}})$ s'étend en une fonction continue sur X^{an} à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, qui est donc bornée inférieurement. En particulier, si D est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif, alors il existe une fonction de Green de D qui s'étend en une fonction continue positive à valeurs dans $[0, +\infty]$, quitte à rajouter une constante très positive à une fonction de Green donnée. Une telle fonction de Green est dite *bornée inférieurement*[1] par zéro.

1. On évite l'utilisation du mot *positive* ici pour ne pas confondre avec la pluri-sous-harmonicité, qui est souvent considérée comme une condition de positivité dans la littérature.