CHAPITRE 5

VARIÉTÉS ARITHMÉTIQUES : THÉORIE GLOBALE

Dans ce chapitre, on fixe un corps de nombres K. On désigne par M_K l'ensemble des places de K. Pour toute place $v \in M_K$, soient $|\cdot|_v$ la valeur absolue sur .

5.1. $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques

La notion de $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur une variété arithmétique est introduite par Moriwaki dans [**?**], qui généralise natuellement la notion de diviseur de Cartier arithmétique, où on remplace la structure entière par une famille de fonctions de Green sur les fibres de la variétés arithmétiques au-dessus des places non-archimédiennes du corps de nombres K. On étend la définition de cette notion dans le cadre de courbe adélique. Dans la suite, on considère un schéma projectif et géométriquement intègre X sur $\operatorname{Spec} K$. Pour toute place $v \in M_K$, soit X_v le K_v-schéma $X \otimes_K K_v$ obtenu par extension de scalaires. On désigne par X_v^{an} l'espace de Berkovich associé à X_v, dont la construction est rappelée dans §**??**.

Soit D un diviseur de Cartier sur X. Pour toute place $v \in M_K$, soit D_v la tirée en arrière de D sur le schéma X_v. Par *famille de Green* de D on entend une famille $g = (g_v)_{v \in M_K}$, où chaque g_v est une fonction de Green du diviseur de Cartier D_v. On introduit une loi d'addition sur l'ensemble des diviseurs de Cartier sur X muni d'une famille de Green en posant

$$(D, (g_v)_{v \in M_K}) + (D', (g'_v)_{v \in M_K}) := (D + D', (g_v + g'_v)_{v \in M_K}).$$

Cela définit une structure de groupe commutatif sur l'ensemble des diviseurs de Cartier munis de familles de Green.

On suppose que le schéma X est plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, où E est un espace vectoriel de rang fini sur K, et que D est le diviseur associé à une section rationnelle non-nulle s de $L = \mathcal{O}_E(1)|_X$, où $\mathcal{O}_E(1)$ désigne le faisceau inversible universel sur $\mathbb{P}(E)$. Si E est muni d'une famille de normes $(\|.\|_v)_{v \in M_K}$ de sorte que $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_{v \in M_K})$ devienne un fibré vectoriel adélique sur S, alors chaque norme

$\|.\|_v$ induit une métrique continue sur L_v (la tirée en arrière de L sur X_v), comme expliquée dans §??. Par abus de langage, on désigne encore par $\|.\|_v$ cette métrique continue sur L_v, appelée la métrique de *Fubini-Study.* Ainsi la famille $(-\ln\|s\|_v)_{v\in M_K}$ forme une famille de Green de $D=(s)$. Le couple $((s),(-\ln\|s\|_v)_{v\in M_K})$ est appelé le *diviseur adélique* associé à s, noté comme $\widehat{(s)}$. La proposition suivante montre que deux familles de Green obtenues de cette façon sont égales sauf sur un nombre fini de places $v\in M_K$.

Proposition 5.1.1. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques, X un schéma projectif et géométriquement intègre sur* $\operatorname{Spec} K$*, et L un fibré inversible sur X. On suppose que $\alpha : X\to\mathbb{P}(E)$ et $\beta : X\to\mathbb{P}(F)$ sont deux immersions fermées telles que $L=\alpha^*(\mathcal{O}_E(1))=\beta^*(\mathcal{O}_F(1))$. Alors pour toute sauf un nombre fini de places $v\in M_K$, les fibrés vectoriels adéliques $\overline{E}$ et $\overline{F}$ induisent la même métrique de Fubini-Study sur L_v.*

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où $E=F$ et les immersions α et β sont identiques. Dans ce cas-là, les structures de fibrés vectoriels adéliques de $\overline{E}$ et $\overline{F}$ coïncident sur toute sauf un nombre fini de $v\in M_K$. Le résultat de la proposition est donc trivial. Plus généralement, si les applications de restriction

$$E=\Gamma(\mathbb{P}(E),\mathcal{O}_E(1))\to\Gamma(X,L)\quad\text{et}\quad F=\Gamma(\mathbb{P}(F),\mathcal{O}_F(1))\to\Gamma(X,L)$$

sont toutes surjectives, alors les immersions fermées α et β se factorisent par $X\to\mathbb{P}(\Gamma(X,L))$. On se ramène donc au cas précédent en considérant les structures de fibré vectoriel adélique quotients sur $\Gamma(X,L)$.

Dans le cas général, il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que les applications de restrictions $S^nE=\Gamma(\mathbb{P}(E),\mathcal{O}_E(n))\to\Gamma(X,L^{\otimes n})$ et $S^nF=\Gamma(\mathbb{P}(F),\mathcal{O}_F(n))\to\Gamma(X,L^{\otimes n})$ soient surjectives. On peut appliquer le résultat de la proposition dans cette situation pour montrer que toutes les structures de fibré vectoriel adélique sur S^nE et S^nF induisent la même métrique de Fubini-Study sur $L_v^{\otimes n}$ pour toute sauf un nombre fini de $v\in M_K$.

Il reste à montrer que, si $n\geqslant 1$ est un entier et si S^nE est muni d'une structure de fibré vectoriel adélique, alors la métrique de Fubini-Study sur $L_v^{\otimes n}$ induite par la structure de fibré vectoriel adélique sur S^nE et la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de la métrique de Fubini-Study sur L_v induite par la structure de fibré vectoriel adélique sur E coïncident pour toute sauf un nombre fini de $v\in M_K$. La validité de cet énoncé ne dépend pas du choix des structures de fibré vectoriel adélique sur E et sur S^nE. Sans perte de généralité, on suppose que E est muni de la famille de normes $(\|.\|_{\boldsymbol{e},v})_{v\in M_K}$, où $\boldsymbol{e}=(e_i)_{i=1}^r$ est une base de E ; on suppose aussi que S^nE est muni de la famille de normes $(\|.\|_{S^n\boldsymbol{e},v})_{v\in M_K}$, où $S^n\boldsymbol{e}$ est la base de S^nE définie comme $(e_1^{m_1}\cdots e_r^{m_r})_{m_1+\cdots+m_r=n}$. Lorsque v est non-archimédienne, la norme $\|.\|_{S^n\boldsymbol{e},v}$ s'identifie à la norme quotient induite par l'application surjective $E^{\otimes n}\to S^nE$, où on considère la norme produit tensoriel sur $E^{\otimes n}$ (de sorte que $(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,r\}^n}$ soit une base orthonormée). Si K_v' est une extension valuée de K_v et si ℓ_v est un quotient de rang 1 de $E \otimes_K K'_v$, alors l'homomorphisme surjectif $E_{K'_v} \to \ell_v$ induit par passage à la puissance symétrique un homomorphisme surjectif $S^n(E_{K'_v}) \cong S^n(E) \otimes_K K'_v \to \ell_v^{\otimes n}$, et la norme quotient de $\|.\|_{S^n \boldsymbol{e},v}$ sur $\ell_v^{\otimes n}$ s'identifie à la norme quotient induite par $E^{\otimes n} \otimes_K K'_v \to \ell_v^{\otimes n}$. Le résultat est donc démontré. □

Définition 5.1.2. — Soit D un diviseur de Cartier sur X. On dit qu'une famille de Green $g = (g_v)_{v \in M_K}$ sur D est de type *presque Fubini-Study* s'il existe un fibré vectoriel adélique $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_{v \in M_K})$, une immersion fermée $i : X \to \mathbb{P}(E)$ et une section rationnelle non-nulle s de $i^*(\mathcal{O}_E(1))$ tels que $D = (s)$ et que $g_v = -\ln \|s\|_{\mathrm{FS},v}$ pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$, où $\|.\|_{\mathrm{FS},v}$ est la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_E(1)_v$ induite par $\|.\|_v$.

L'existence de famille de Green de type presque Fubini-Study pour un diviseur Cartier D entraîne que le diviseur D est très ample. Réciproquement, étant donné un diviseur de Cartier très ample D, il existe toujours une famille de Green de D qui est de type presque Fubini-Study. En outre, la proposition 5.1.1 montre que, si g et g' sont deux familles de Green de type presque Fubini-Study d'un même diviseur de Cartier D, alors l'égalité $g_v = g'_v$ est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$.

Proposition 5.1.3. — *Soient D et D' deux diviseurs de Cartier sur X, g et g' deux familles de Green de D et D' respectivement. On suppose que les familles de Green g et g' sont de type presque Fubini-Study, alors la famille de Green $g + g'$ de $D + D'$ est aussi de type presque Fubini-Study.*

Démonstration. — Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques, $\alpha : X \to \mathbb{P}(E)$ et $\beta : X \to \mathbb{P}(F)$ deux immersions fermées telles que $\mathcal{O}_X(D) \cong \alpha^*\mathcal{O}_E(1)$ et $\mathcal{O}_X(D') \cong \beta^*\mathcal{O}_F(1)$. Pour toute place $v \in M_K$, on munit $\mathcal{O}_X(D)_v$ et $\mathcal{O}_X(D')_v$ des métriques de Fubini-Study (qui proviennent des normes sur $E \otimes_K K_v$ et $F \otimes_K K_v$ respectivement). Soit $\gamma : X \to \mathbb{P}(E \otimes_K F)$ l'immersion fermée induite par le morphisme de Segre $\varsigma : \mathbb{P}(E) \times_K \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(E \otimes_K F)$. Pour toute place non-archimédienne $v \in M_K$, la métrique produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X(D + D')_v \cong \mathcal{O}_X(D)_v \otimes \mathcal{O}_X(D')_v$ induite par les métriques de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_E(1)_v$ et $\mathcal{O}_F(1)_v$ coincide avec la restriction de la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{E \otimes F}(1)_v$ par le plongement γ, où on considère les normes du fibré vectoriel adélique ε-produit tensoriel $\overline{E} \otimes_\varepsilon \overline{F}$ (voir §**??** pour sa définition). La proposition est donc démontrée. □

Corollaire 5.1.4. — *Soient D et D' deux diviseurs de Cartier très amples tels que $D - D'$ soit aussi très ample. Si g et g' sont des familles de Green de D et D' respectivement, qui sont de type presque Fubini-Study, alors la famille de Green $g - g'$ de $D - D'$ est aussi de type presque Fubini-Study.*

Démonstration. — Soit g'' une famille de Green de $D - D'$ qui est de type presque Fubini-Study. La proposition 5.1.3 montre que $g''+g'$ est une famille de Green de type presque Fubini-Study de D. D'après la proposition 5.1.1, on obtient que $g'_v + g''_v = g_v$ pour toute sauf un nombre fini de places dans M_K. La famille de Green $g - g'$ est donc de type presque Fubini-Study. □

Définition 5.1.5. — On appelle $\mathbb{R}$-*diviseur adélique* sur X tout couple de la forme

$$(D, g = (g_v)_{v\in M_K}),$$

où D est un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X et g_v est une fonction de Green de D_v, qui satisfont à la condition suivante : il existe des diviseurs de Cartier $D_1, \ldots, D_n$ sur X, des familles de Green $g_1, \ldots, g_n$ de type presque Fubini-Study de $D_1, \ldots, D_n$ respectivement, et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que $D = \lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n$ et que

$$\forall\, v \in M_K, \quad g_v = \lambda_1 g_{1,v} + \cdots + \lambda_n g_{n,v}.$$

On désigne par $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$ l'espace vectoriel des $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sur X. On a une application $\mathbb{R}$-linéaire de $K(X)^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vers $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$ qui envoie toute fonction rationnelle non-nulle f en

$$\widehat{(f)} := ((f), (-\ln |f|_v)_{v\in M_K}).$$

Les $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques qui appartiennent à l'image de cette application sont dits *principaux*.

Proposition 5.1.6. — *Soient (D, g) et (D, g') deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sur X qui ont le même $\mathbb{R}$-diviseur sous-jacent. Alors la relation $g_v = g'_v$ est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$.*

Démonstration. — Montrons l'énoncé suivant qui est équvalent à celui dans la proposition : si $(\mathbf{0}, g)$ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique, où $\mathbf{0}$ désigne le $\mathbb{R}$-diviseur trivial, alors $g_v = 0$ pour toute sauf un nombre fini de $v \in M_K$. Par définition, il existe des diviseurs de Cartier $D_1, \ldots, D_n$ sur X, des familles de Green $g_1, \ldots, g_n$ de type presque Fubini-Study de $D_1, \ldots, D_n$ respectivement, et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n = \mathbf{0}$ et que

$$\forall\, v \in M_K, \quad g_v = \lambda_1 g_{1,v} + \cdots + \lambda_n g_{n,v}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $D_1, \ldots, D_m$ sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que $D_{m+1}, \ldots, D_n$ appartiennent au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ engendré par $D_1, \ldots, D_m$. Soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $ND_j \in \mathbb{Z}D_1 + \cdots + \mathbb{Z}D_m$ pour tout $j \in \{m+1, \ldots, n\}$. On écrit ND_j sous la forme

$$ND_j = a_{j,1} D_1 + \cdots + a_{j,m} D_m,$$

où $a_{j,1},\ldots,a_{j,m}$ sont des entiers. La proposition 5.1.3 et son corollaire 5.1.4 montrent que

$$g'_j := a_{j,1}g_1 + \cdots + a_{j,n}g_n$$

est une famille de Green de type presque Fubini-Study de ND_j. La proposition 5.1.1 montre que l'égalité $g'_{j,v} = Ng_{j,v}$ est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$. Comme $D_1,\ldots,D_m$ sont linéairement indépendantes, on a

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,m\},\quad \lambda_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{j,i}\frac{\lambda_j}{N} = 0.$$

En particulier, pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_{k,v} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{i,v} + \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{N}\sum_{i=1}^{m}a_{j,i}g_{i,v} = 0.$$

Le résultat est donc démontré. □

5.2. Système linéaire adélique

Soient $S = (K, M_K, \Theta_K)$ une courbe adélique et X un schéma géométriquement intègre sur $\operatorname{Spec} K$. Étant donné un $\mathbb{R}$-diviseur adélique $\overline{D} = (D,(g_v)_{v\in M_K})$, on peut construire une famille de normes sur $H^0(D)\otimes_K K_v$, $v \in M_K$, qui est définie de manière suivante. Tout élément $f \in H^0(D)\otimes_K K_v$ détermine une fonction rationnelle sur X_v que l'on note encore comme f par abus de langage. En outre, on a $(f) + D_v \geqslant 0$. Par conséquent, $|f|_v \cdot \mathrm{e}^{-g_v}$ s'étend en une fonction continue sur X_v^{an} (cf. la remarque 4.4.2), que l'on note comme $\|f\|_{g_v}$ ou comme $\|f\|_{\overline{D},v}$. Si la fonction rationnelle s est non-nulle, cette fonction n'est pas identiquement nulle. On définit

$$\|f\|_{g_v,\sup} := \sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}}\|f\|_{g_v}(x).$$

Le nombre $\|f\|_{g_v,\sup}$ est noté aussi comme $\|f\|_{\overline{D},v,\sup}$ Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $H^0(D)\otimes_K K_v$, alors on a

$$\|f_1+f_2\|_{g_v} \leqslant \|f_1\|_{g_v} + \|f_2\|_{g_v}.$$

On en déduit que $\|.\|_{g_v,\sup}$ est une norme sur $H^0(D)\otimes_K K_v$. Cette norme est ultramétrique lorsque v est une place non-archimédienne.

Dans le cas où D est un diviseur de Cartier, l'espace vectoriel $H^0(D)$ est isomorphe à l'espace des sections globales du faisceau inversible $\mathcal{O}(D)$. Comme expliqué dans §4.4, la fonction de Green g_v détermine une métrique continue sur le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)_v$. Si f est un élément de $H^0(D)\otimes_K K_v$, alors $\|f\|_{g_v}$ s'identifie à la norme de la section fs_D par rapport à cette métrique, où s_D est la section rationnelle canonique de $\mathcal{O}(D)$.

Définition 5.2.1. — Soit $\overline{D} = (D, (g_v)_{v\in M_K})$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur X. On suppose que D est effectif. La fonction rationnelle de l'unité $\mathbf{1}$ appartient donc à $H^0(D)$. Pour tout $v \in M_K$, on a

$$\|\mathbf{1}\|_{g_v,\sup} = \exp\Big(-\inf_{x\in X_v^{\mathrm{an}}} g_v(x)\Big),$$

où on a considéré g_v comme une application continue de X_v^{an} vers $]-\infty, +\infty]$. En particulier, si toutes les fonctions de Green $(g_v)_{v\in M_K}$ sont bornées inférieurements par zéro, alors on a $\|\mathbf{1}\|_{g_v,\sup} \leqslant 1$ pour toute place $v \in M_K$. Dans ce cas-là, on dit que le $\mathbb{R}$-diviseur adélique $\overline{D}$ est *effectif*.

Soient $\overline{D}$ et $\overline{D}'$ deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sur X. La loi de multiplication de $K(X)$ induit une application K-linéaire de $H^0(D) \otimes_K H^0(D')$ vers $H^0(D + D')$. En outre, si f est un élément de $H^0(D) \otimes_K K_v$ et si f' est un élément de $H^0(D') \otimes_K K_v$, alors on a

$$\|ff'\|_{\overline{D}+\overline{D}',v} = \|f\|_{\overline{D},v} \cdot \|f\|_{\overline{D}',v},$$

où v est une place dans M_K. En particulier, on a

$$\|ff'\|_{\overline{D}+\overline{D}',v,\sup} \leqslant \|f\|_{\overline{D},v,\sup} \cdot \|f'\|_{\overline{D}',v,\sup}.$$

On en déduit que, si $\overline{D}$ et $\overline{D}'$ sont deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques tels que $\overline{D}' - \overline{D}$ soit effectif, alors on a $H^0(D) \subset H^0(D')$. De plus, pour toute place $v \in M_K$ et tout élément $f \in H^0(D) \otimes_K K_v$, on a $\|f\|_{\overline{D},v} \leqslant \|f\|_{\overline{D}',v}$. En d'autres termes, l'application d'inclusion de $H^0(D) \otimes_K K_v$ dans $H^0(D') \otimes_K K_v$ a pour norme d'opérateur $\leqslant 1$.

Les propositions suivantes ainsi que leur corollaire montrent que, pour tout $\mathbb{R}$-diviseur adélique $\overline{D}$, l'espace vectoriel $H^0(D)$ muni des normes $(\|.\|_{\overline{D},v,\sup})_{v\in M_K}$ forme un fibré vectoriel adélique.

Proposition 5.2.2. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique, X un sous-schéma fermé géométriquement intègre de $\mathbb{P}(E)$, et L la restiction de $\mathcal{O}_E(1)$ à X. On suppose que l'application de restriction $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)) \to H^0(X, L)$ est surjective. Pour tout $v \in M_K$, soit $\|.\|_{\mathrm{FS},v}$ la métrique de Fubini-Study sur L_v induit par la norme d'indice v dans la structure de fibré vectoriel adélique de $\overline{E}$. Pour tout élément $s \in H^0(X_v, L_v) = H^0(X, L) \otimes_K K_v$, soit*

$$\|s\|_{v,\sup} = \sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}} \|s\|_{\mathrm{FS},v}(x).$$

Alors l'espace vectoriel $H^0(X, L)$ muni des normes $(\|.\|_{v,\sup})_{v\in M_K}$ forme un fibré vectoriel adélique sur K.

Démonstration. — Quitte à remplacer $\overline{E}$ par $H^0(X, L)$ muni des normes quotients, on peut supposer que $E = H^0(X, L)$. Il existe alors des points $P_1, \ldots, P_n$ de X dans une extension finie K' de K, qui forment un système génératrice et linéairement indépendant de sous-espaces vectoriels de rang 1 de $E^\vee \otimes_K K'$ (ici on considère les K-points de $\mathbb{P}(E)$ à valeurs dans K' comme des quotients de rang 1 de $E \otimes_K K'$, ou des sous-espaces de rang 1 de $E^\vee \otimes_K K'$). Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ une base de $E \otimes_K K'$ telle que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, la restriction de s_i à la droite P_j soit nulle. Le résultat de la proposition ne dépend pas du choix des normes dans la structure du fibré vectoriel adélique sur $\overline{E}$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $(s_1, \ldots, s_n)$ est une base orthonorée de $E \otimes_K K'_v$ lorsque $v \in M_K$ est une place non-archimédienne (comme dans la remarque **??**, on étend arbitrairement chaque valeur absolue $|.|_v$ sur K' afin d'étendre la norme $\|.\|_v$ sur $E \otimes_K K'_v$). Si $s = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n$ est un élément de $E \otimes_K K_v$ (vu comme un sous-ensemble de $E \otimes_K K'_v$), alors on a

$$\|s\|_{\mathrm{FS},v}(x) \leqslant \|s\|_v = \max(|\lambda_1|_v, \ldots, |\lambda_n|_v)$$

puisque la métrique de Fubini-Study est induite par les normes quotients. En outre, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\|s\|_{\mathrm{FS},v}(P_i) = \inf_{\substack{\alpha \in E \otimes_K K'_v \\ \alpha|_{P_i} = 0}} \|s + \alpha\|_v = |\lambda_i|_v.$$

On obtient donc $\|s\|_{v,\sup} = \|s\|_v$, d'où le résultat de la proposition. □

Proposition 5.2.3. — *Soit $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur X. On suppose que D est effectif. Alors la relation*

$$\inf_{x \in X_v^{\mathrm{an}}} g_v(x) = 0$$

est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$. En particulier, pour tout $\mathbb{R}$-diviseur adélique D sur $\mathbb{R}$, il existe toujour une famille de Green g de D telle que le $\mathbb{R}$-diviseur adélique (D, g) soit effectif.

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où D est un diviseur de Cartier. On choisit un diviseur de Cartier D_1 sur X qui est très ample et tel que $D_2 := D + D_1$ soit aussi très ample. Soient $E_1 = H^0(D_1)$ et $E_2 = H^0(D_2)$. Comme D est un diviseur effectif, on a $E_1 \subset E_2$. On munit E_2 d'une structure de fibré vectoriel adélique $(\|.\|_v)_{v \in M_K}$ et munit E_1 des normes induites. Soient $g_1 = (g_{1,v})_{v \in M_K}$ et $g_2 = (g_{2,v})_{v \in M_K}$ des familles de Green de D_1 et D_2, qui proviennent des métriques de Fubini-Study sur $\mathcal{O}(D_1)$ et $\mathcal{O}(D_2)$ respectivement. En particulier, on a $g_{2,v} \geqslant g_{1,v}$ pour toute $v \in M_K$.

La proposition 5.1.6 montre que la validité du résultat de la proposition présente ne dépend pas du choix de la famille de Green g. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $g = g_2 - g_1$. Dans ce cas-là, pour toute place $v \in M_K$, la fonction g_v est bornée inférieurement par zéro. En outre, la proposition précédente **??** montre qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{S}$ de M_K tel que les relations

$$\|\mathbf{1}\|_{g_{1,v},\sup} = \|\mathbf{1}\|_{g_{2,v},\sup} = 1$$

soient vérifiées pour toute place $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$ (voir aussi la remarque **??**). Cela montre que, pour toute $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$, il existe $x_v \in X_v^{\mathrm{an}}$ tel que

$$\|\mathbf{1}\|_{g_{1,v}}(x_v) = \|\mathbf{1}\|_{g_{2,v}}(x_v) = 1.$$

On obtient donc $g_v(x_v) = 0$.

Pour le cas où D est un $\mathbb{R}$-diviseur quelconque, on peut écrire $\overline{D}$ sous la forme

$$\overline{D} = \lambda_1 \overline{D}_1 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_n,$$

où $D_1, \ldots, D_n$ sont des diviseurs de Cartier effectifs, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres positifs. Sans perte de généralité, on peut supposer les $\overline{D}_i$ effectifs. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers tels que $a_i \geqslant \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et

$$\overline{D}' = (D', (g'_v)_{v \in M_K}) := a_1 \overline{D}_1 + \cdots + a_n \overline{D}_n.$$

Par définition, on a $g'_v \geqslant g_v \geqslant 0$ pour toute $v \in M_K$. Comme D' est un diviseur de Cartier effectif, d'après ce que l'on a démontré plus haut, on obtient qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{S}$ de M_K tel que $\inf_{x \in X_v^{\mathrm{an}}} g'_v(x) = 0$ pour toute $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$. On en déduit que $\inf_{x \in X_v^{\mathrm{an}}} g_v(x) = 0$ pour toute $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$. Le premier énoncé de la proposition est donc démontré.

Pour établir le deuxième énoncé, on peut commencer par une famille de Green arbitraire $\widetilde{g}$ telle que $(D, \widetilde{g})$ soit un $\mathbb{R}$-diviseur adélique. Le premier énoncé de la proposition montre que, pour toute sauf un nombre fini de $v \in M_K$, la fonction $\widetilde{g}_v$ est bornée inférieurement par zéro. En outre, d'après la remarque 4.4.2, toute fonction $\widetilde{g}_v$ est bornée inférieurement. Quitte à rajouter des constantes positives à un nombre fini de fonctions de Green $\widetilde{g}_v$, on obtient une famille de Green g qui consiste des fonctions bornées inférieurement par zéro et telle que (D, g) soit un $\mathbb{R}$-diviseur adélique. Le résultat est donc démontré. □

Corollaire 5.2.4. — *Soit $\overline{D} = (D, g)$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur X. L'espace vectoriel $H^0(D)$ muni des normes $(\|.\|_{\overline{D},v,\sup})_{v \in M_K}$ forme un fibré vectoriel adélique.*

Démonstration. — Soit D' un diviseur de Cartier très ample sur X tel que $D'' := D' - D$ soit effectif. D'après la démonstration de la proposition 5.2.3, il existe une famille de Green g'' sur D'' telle que (D'', g'') soit effectif. On munit le diviesur de Cartier D' de la famille de Green $g' := g'' + g$. En outre, on identifie $H^0(D)$ à un sous-espace vectoriel de $H^0(D')$. Comme $g''_v \geqslant 0$ pour toute place $v \in M_K$, on obtient que $\|f\|_{\overline{D},v} \geqslant \|f\|_{\overline{D}',v}$, et donc $\|f\|_{\overline{D},v,\sup} \geqslant \|f\|_{\overline{D}',v,\sup}$ pour tout $f \in H^0(D) \otimes_K K_v$. D'après la proposition 5.2.2, l'espace vectoriel $H^0(D')$ muni des normes $(\|.\|_{\overline{D}',v,\sup})_{v \in M_K}$ forme un fibré vectoriel adélique. Soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base de l'espace vectoriel $H^0(D)$. On la complète en une base de l'espace vectoriel $H^0(D')$ par des vecteurs $e_{m+1}, \ldots, e_n$. D'après la remarque **??**, il existe un sous-ensemble fini Θ de M_K, qui contient toutes les places archimédliennens et tel que $(e_i)_{i=1}^n$ soit une base orthonormée de $H^0(D') \otimes_K K_v$ pour toute place $v \in M_K \setminus \Theta$. En outre, d'après la proposition 5.2.3, on obtient que, quitte à élargir l'ensemble S, on peut supposer que $\|e_i\|_{\overline{D},v,\sup} = 1$ pour toute $v \in M_K \setminus \Theta$. On en déduit que, pour toute $v \in M_K \setminus \Theta$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K_v$, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D},v,\sup} \geqslant \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D}',v,\sup} = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} |\lambda_i|_v.$$

En outre, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D},v\,\mathrm{sup}} \leqslant \max_{i\in\{1,\ldots,m\}} |\lambda_i|_v \cdot \|e_i\|_{\overline{D},v,\mathrm{sup}}.$$

Cela montre que $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée de $H^0(D) \otimes_K K_v$ pour toute $v \in M_K \setminus \Theta$. Autrement dit, $H^0(D)$ muni des normes $(\|.\|_{\overline{D},v,\mathrm{sup}})_{v\in M_K}$ est un fibré vectoriel adélique. $\square$