Université Paris Diderot
M2 Géométrie d'Arakelov

Contrôle de connaissance du mercredi 24 février 2016
13h30-16h30, Sophie Germain, salle 2011

Les documents sont autorisés. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 20\}$, $i < j$, le résultat de la question numéro i peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet (4 pages) avant de répondre aux questions. Les deux parties du sujet sont indépendantes.

Première partie

Dans cette partie, k désigne un corps commutatif non-nul. On désigne par $|\cdot|_0$ la valeur absolue triviale sur k. On rappelle que $|a|_0 = 1$ pour tout $a \in k^\times := k \setminus \{0\}$. Si V est un espace vectoriel sur k, on désigne par $\Theta(V)$ l'ensemble de tous les sous-espaces k-vectoriels de V. L'ensemble $\Theta(V)$ est muni de la relation d'ordre d'inclusion $\supset$. Quand on considère une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel V sur k, cette norme est supposée être définie *relativement à la valeur absolue triviale* $|\cdot|_0$ sur k. En particulier, on a

$$\forall\, a \in k^\times,\ \forall\, x \in V, \quad \|ax\| = \|x\|, \tag{1}$$

Si V est un espace vectoriel sur k muni d'une norme $\|\cdot\|$, on désigne par $\Psi(V, \|\cdot\|)$ l'esemble des boules fermées centrées à l'origine qui ne réduisent pas à un point. Autrement dit, $\Psi(V, \|\cdot\|)$ est l'ensemble des parties $W \neq \{0\}$ de V de la forme

$$(V, \|\cdot\|)_{\leqslant r} := \{x \in V \,:\, \|x\| \leqslant r\}, \quad r > 0.$$

Si V est un espace vectoriel de rang fini sur k, muni d'une norme $\|\cdot\|$. On désigne par $\deg(V, \|\cdot\|)$ le nombre $-\ln \|\eta\|_{\text{dét}}$, où $\|\cdot\|_{\text{dét}}$ est la norme déterminantale sur $\text{dét}\,(V)$ induite par $\|\cdot\|$ et η est un élément non-nul de $\text{dét}\,(V)$ (d'après la relation (1), cette définition ne dépend pas du choix de η). Si de plus V est non-nul, on désigne par $\mu(V, \|\cdot\|)$ le rapport $\deg(V, \|\cdot\|)/\operatorname{rg}_k(V)$, et on définit

$$\mu_{\max}(V, \|\cdot\|) = \sup_{\{0\} \neq W \subset V} \mu(W, \|\cdot\|_W), \quad \mu_{\min}(V, \|\cdot\|) = \inf_{V \twoheadrightarrow Q,\, Q \neq \{0\}} \mu(Q, \|\cdot\|_Q),$$

où $(W, \|\cdot\|_W)$ parcourt l'ensemble des sous-espaces k-vectoriels non-nuls munis des normes restrictions, et $(Q, \|\cdot\|_Q)$ parcourt l'ensemble des espaces k-vectoriels quotients non-nuls de V munis des normes quotients.

1. Soit V un espace vectoriel sur k muni d'une norme *ultramétrique* $\|\cdot\|$. Montrer que $\Psi(V, \|\cdot\|)$ est un sous-ensemble de $\Theta(V)$ qui est totalement ordonné par rapport à la relation d'inclusion.

Tourner SVP

2. Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k, muni d'une norme *ultramétrique* $\|\cdot\|$. Montrer que, pour tout sous-espace k-vectoriel W de V, on a

$$\deg(V, \|\cdot\|) = \deg(W, \|\cdot\|_W) + \deg(Q, \|\cdot\|_Q),$$

où $\|\cdot\|_W$ est la restriction de $\|\cdot\|$ à W, et $(Q, \|\cdot\|_Q)$ est l'espace quotient $Q = V/W$ muni de la norme quotient.

Dans les questions **3.–8.**, on fixe un espace vectoriel de rang fini et non-nul V sur k, muni d'une norme *ultramétrique* $\|\cdot\|$. On définit en outre une fonction $\varphi_{\|\cdot\|}$ sur $\Psi(V, \|\cdot\|)$ telle que

$$\forall\, W \in \Psi(V, \|\cdot\|), \quad \varphi_{\|\cdot\|}(W) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, W \subset (V, \|\cdot\|)_{\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda}}\}.$$

3. Montrer que $\Psi(V, \|\cdot\|)$ est un ensemble fini et non-vide, dont le cardinale n'excède pas le rang de V sur k.

4. Montrer que la fonction $\varphi_{\|\cdot\|}$ définit une application injective de $\Psi(V, \|\cdot\|)$ vers $\mathbb{R}$, qui préserve les ordres, où on considère la relation d'inclusion $\supset$ sur $\Psi(V, \|\cdot\|)$ et la relation d'ordre usuelle $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\gamma(t) = \max_{\substack{W \in \Psi(V, \|\cdot\|) \\ \varphi_{\|\cdot\|}(W) \geqslant t}} \mathrm{rg}_k(W).$$

Si t est strictement plus grand que la valeur maximale de la fonction $\varphi_{\|\cdot\|}$, on définit $\gamma(t) = 0$ par convention. Montrer que la fonction γ est décroissante et continue à gauche, et on a

$$\deg(V, \|\cdot\|) = -\int_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}\gamma(t).$$

Indication : on peut construire une base orthogonale convenable de $(V, \|\cdot\|)$.

6. Soit V_1 l'élément de $\Psi(V, \|\cdot\|)$ qui maximise la fonction $\varphi_{\|\cdot\|}$. Montrer que

$$\mu_{\max}(V, \|\cdot\|) = \mu(V_1, \|\cdot\|_{V_1}) = \varphi_{\|\cdot\|}(V_1),$$

où $\|\cdot\|_{V_1}$ désigne la restriction de $\|\cdot\|$ à V_1.

7. Montrer que, si W est un sous-espace k-vectoriel non-nul de V, tel que $\mu(W, \|\cdot\|_W) = \mu_{\max}(V, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|_W$ est la restriction de $\|\cdot\|$ à W, alors W est contenu dans V_1.

8. Montrer que $\mu_{\min}(V, \|\cdot\|)$ est égale à la valeur minimale de la fonction φ.

9. Soient V un espace vectoriel de rang fini sur k, Ψ un sous-ensemble totalement ordonné de $\Theta(V)$ et $\varphi : (\Psi, \supset) \to (\mathbb{R}, \leqslant)$ une application injective qui préserve strictement les ordres. Montrer qu'il existe une unique norme ultramétrique $\|\cdot\|$ sur V telle que $\Psi = \Psi(V, \|\cdot\|)$ et $\varphi = \varphi_{\|\cdot\|}$.

10. (Question du cours) En déduire que, pour toute fonction $d : \Theta(V) \to \mathbb{R}$ telle que $d(\{0\}) = 0$ et

$$\forall\,(W_1, W_2) \in \Theta(V)^2, \quad d(W_1 + W_2) + d(W_1 \cap W_2) \geqslant d(W_1) + d(W_2),$$

il existe une unique norme ultramétrique $\|\cdot\|$ sur V telle que $\Psi(V, \|\cdot\|)$ soit le drapeau de Harder-Narasimhan de la fonction de pente $\mu(\cdot) := d(\cdot)/\operatorname{rg}_k(\cdot)$ et que l'image de l'application $\varphi_{\|\cdot\|}$ soit l'ensemble des pentes successives.

Deuxième partie

On appelle *réseau euclidien* tout $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini $\mathcal{E}$ muni d'un produit euclidien $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On considère $\mathcal{E}$ comme un sous-ensemble dans l'espace euclidien $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}, \langle\ ,\ \rangle)$. Si $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ est un réseau euclidien, son *dual* est défini comme le $\mathbb{Z}$-module dual $\mathcal{E}^\vee$ muni du produit euclidien dual $\langle\ ,\ \rangle^*$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^\vee$. On définit

$$\widehat{h}^0(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) = \ln \#\{u \in \mathcal{E}\ :\ \langle u, u\rangle \leqslant 1\}.$$

Si $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien et si A est un sous-ensemble de V, on définit

$$\rho(A, \langle\ ,\ \rangle) := \sum_{x \in A} \mathrm{e}^{-\pi\langle x, x\rangle} \in [0, +\infty].$$

Soit $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ un réseau euclidien. Si x est un point de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$, on désigne par $\mathcal{E} + x$ le sous-ensemble $\{u + x\ :\ u \in \mathcal{E}\}$ de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$. Soit ν la mesure de Haar sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ telle que le parallelogramme engendré par toute base orthonormée de $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}, \langle\ ,\ \rangle)$ a pour volume 1 sous la mesure ν. Rappelons que $-\ln \nu(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}/\mathcal{E})$ s'identifie au degré d'Arakelov du fibré vectoriel adélique sur $\mathbb{Q}$ déterminé par le réseau $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$, où $\nu(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}/\mathcal{E})$ est le covolume du réseau $\mathcal{E}$, qui est le volume de n'import quel domaine fondamental du quotient $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}/\mathcal{E}$ par rapport à la mesure ν. On désigne par $\widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ le nombre $-\ln \nu(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}/\mathcal{E})$.

Dans la suite, on fixe un réseau euclidien $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$.

11. Montrer que, pour tout nombre réel $t > 0$, on a

$$\widehat{\deg}(\mathcal{E}, t\langle\ ,\ \rangle) = \widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) - \frac{1}{2}\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})\ln(t).$$

12. Montrer que, pour tout point $x \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$, on a $\rho(\mathcal{E} + x, \langle\ ,\ \rangle) < +\infty$. En outre, la fonction $(x \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}) \mapsto \rho(\mathcal{E} + x, \langle\ ,\ \rangle)$ est $\mathcal{E}$-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

13. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^\vee$, on a

$$\int_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}}} \exp\big(-\pi\langle y, y\rangle - 2\pi i\xi(y)\big)\,\nu(\mathrm{d}y) = \mathrm{e}^{-\pi\langle \xi, \xi\rangle^*}.$$

Tourner SVP

14. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$,

$$\rho(\mathcal{E}+x, \langle\ ,\ \rangle) = \exp\big(\widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)\big) \sum_{\alpha \in \mathcal{E}^\vee} \mathrm{e}^{2\pi i \alpha(x)} \int_\Gamma \rho(\mathcal{E}+y, \langle\ ,\ \rangle) \mathrm{e}^{-2\pi i \alpha(y)}\, \nu(\mathrm{d}y),$$

où Γ est un domaine fondamental de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}/\mathcal{E}$. On peut d'abord montrer que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{E}^\vee} \left| \int_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}}} \exp\big(-\pi\langle y, y\rangle - 2\pi i \alpha(y)\big)\, \nu(\mathrm{d}y) \right| < +\infty.$$

15. Montrer que

$$\rho(\mathcal{E}+x, \langle\ ,\ \rangle) = \exp\big(\widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)\big) \sum_{\alpha \in \mathcal{E}^\vee} \mathrm{e}^{2\pi i \alpha(x) - \pi\langle \alpha, \alpha\rangle^*}.$$

En déduire que $\rho(\mathcal{E}+x, \langle\ ,\ \rangle) \leqslant \rho(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ pour tout $x \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ et

$$\widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) \leqslant \ln \rho(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle).$$

16. Montrer que la fonction

$$(t \in]0, +\infty[) \longmapsto \rho(\mathcal{E}, t\langle\ ,\ \rangle) \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E}) \ln(t)\right)$$

est croissante.

17. En déduire que

$$\sum_{u \in \mathcal{E}} \langle u, u\rangle \mathrm{e}^{-\pi\langle u, u\rangle} \leqslant \frac{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})}{2\pi} \sum_{u \in \mathcal{E}} \mathrm{e}^{-\pi\langle u, u\rangle}$$

et

$$\forall\, t \in]0, 1[, \quad \rho(\mathcal{E}, t\langle\ ,\ \rangle) \leqslant \rho(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) t^{-\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})/2}.$$

18. Montrer que, pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $r > 0$, on a

$$\rho(\mathcal{E} \setminus B_r, \langle\ ,\ \rangle) \leqslant \mathrm{e}^{-\pi(1-t)r^2} \rho(\mathcal{E}, t\langle\ ,\ \rangle),$$

où $B_r := \{x \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}} \,:\, \langle x, x\rangle \leqslant r^2\}$.

19. Montrer que, pour tout $r \geqslant \sqrt{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})/2\pi}$, on a

$$\widehat{h}^0(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) \geqslant \ln\left(1 - \exp\left(\frac{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})}{2} - \pi r^2\right)\left(\frac{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})}{2\pi r^2}\right)^{-\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})/2}\right) + \ln \rho(\mathcal{E}, r^2\langle\ ,\ \rangle).$$

On peut utiliser le fait que $\widehat{h}^0(\mathcal{E}, r^{-2}\langle\ ,\ \rangle) \geqslant \rho(B_r \cap \mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$.

20. Montrer que

$$\widehat{h}^0(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) \geqslant \widehat{\deg}(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle) - \frac{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})}{2} \ln(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})) + \frac{\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})}{2} \ln(2\pi).$$

Fin de l'épreuve