Université Paris Diderot
M2 Géométrie d'Arakelov

Contrôle de connaissance du mercredi 13 avril 2016
14h-17h, Sophie Germain, salle 2015

Les documents sont autorisés.

Notations

Dans toute l'épreuve, $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ désigne la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Si K est un sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ tel que $[K:\mathbb{Q}]<+\infty$, on désigne par M_K l'ensemble des places de K.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ qui est une extension finie de $\mathbb{Q}$. Pour toute place $v\in M_K$, soit $|\cdot|_v$ la valeur absolue dans la classe v dont la restriction à $\mathbb{Q}$ s'identifie à la valeur absolue usuelle ou une valeur absolue p-adique normalisée de sorte que $|p|_v=p^{-1}$, où p est un nombre premier, et on désigne par K_v le complété de K par rapport à $|\cdot|_v$ sur lequel la valeur absolue $|\cdot|_v$ s'étend de façon unique. Rappelons qu'un *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} K$ est par définition un espace vectoriel de rang fini E sur K muni d'une famille $(\|\cdot\|_{E,v})_{v\in M_K}$ de normes, où $\|\cdot\|_{E,v}$ est une norme sur $E\otimes_K K_v$, de sorte que toute base de E sur K est orthonormée par rapport à $\|\cdot\|_{E,v}$ pour toute sauf un nombre fini de places $v\in M_K$. Si de plus E est de rang 1, on dit que $(E,(\|\cdot\|_{E,v})_{v\in M_K})$ est un *fibré inversible adélique* sur $\operatorname{Spec} K$. Si $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$ est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$, on définit le *degré d'Arakelov normalisé* de $\overline{E}$ comme

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E})=-\sum_{v\in M_K}\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{E,v,\mathrm{dét}}\,,$$

où $\mathbb{Q}_v$ est le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à $|\cdot|_v$ et $(s_i)_{i=1}^r$ est une base de E sur $\mathbb{Q}$. On a vu dans le cours que la valeur de $\widehat{\deg}_n(\overline{E})$ ne dépend pas du choix de la base $(s_i)_{i=1}^r$. Si E est non-nul, sa pente est définie comme $\widehat{\mu}(\overline{E})=\widehat{\deg}_n(\overline{E})/\operatorname{rg}(E)$.

On fixe un entier $d\geqslant 1$ dans l'épreuve et on désigne par V l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^{d+1}$ sur $\mathbb{Q}$. Soient $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$ le schéma $\mathbb{P}(V^\vee)$, et $\pi:\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}\to\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ le morphisme structurel. Rappelons que, pour tout $\mathbb{Q}$-schéma S dont le morphisme structurel est $p:S\to\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$, l'ensemble $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(S)$ s'identifie à l'ensemble des quotients inversibles de $p^*(V^\vee)$. En particulier, si K est une extension de $\mathbb{Q}$, alors $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K):=\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Spec}K)$ s'identifie à l'ensemble des espaces quotients de rang 1 de $V^\vee\otimes_{\mathbb{Q}}K\cong(V_K)^\vee$, où V_K désigne l'espace K-vectoriel $V\otimes_{\mathbb{Q}}K=K^{d+1}$. Enfin, on désigne par $\mathcal{O}(1)$ le faisceau inversible universel sur $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$. C'est le quotient inversible de $\pi^*(V^\vee)$ qui correspond à $\mathrm{Id}:\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$ via le lemme de Yoneda. Si N est un entier, $N\geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{O}(N)$ la puissance tensorielle $\mathcal{O}(1)^{\otimes N}$.

On munit l'espace vectoriel V d'une famille de norms $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_{\mathbb{Q}}}$ de sorte que $\overline{V}=(V,(\|\cdot\|_v)_{v\in M_{\mathbb{Q}}})$ devienne un fibré vectoriel adélique sur $\mathbb{Q}$. Pour tout place $v\in M_{\mathbb{Q}}$, soit $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}_v}$ le $\mathbb{Q}_v$-schéma $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Q}}\operatorname{Spec}\mathbb{Q}_v$ et on désigne par $\mathcal{O}(1)_v$ le tire en arrière de $\mathcal{O}(1)$ par le morphisme de projection $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}_v}\to\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$. Pour toute place $v\in M_K$, soit φ_v la metrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}(1)_v$ induite par la norme $\|\cdot\|_v$.

Première partie

1. Soit K un sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$. Soit $u_K : K^{d+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$ l'application qui envoie $x = (x_0, \ldots, x_d)$ en l'espace quotient de $V^\vee \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong V_K^\vee$ par le sous-espace vectoriel des formes linéaires $\varphi \in V_K^\vee$ telles que $\varphi(x) = 0$. Montrer que l'application u_K est surjective et que $u_K(\lambda x) = u_K(x)$ pour tout $\lambda \in K^\times := K \setminus \{0\}$ et tout $x \in K^{d+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. En déduire que u_K induit une bijection $(K^{d+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/K^\times \to \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$ qui est fonctorielle par rapport à $K \subset \mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$.

2. Soient $K_1 \subset K_2$ deux sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$. Montrer que l'application canonique $\mathbb{P}^n(K_1) \to \mathbb{P}^n(K_2)$ est injective.

3. Montrer que, pour tout sous-corps K de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$, le système des applications canoniques

$$\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K') \longrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K), \quad K' \subset K \text{ sous-corps, } [K' : \mathbb{Q}] < +\infty$$

identifie $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$ à la limite inductive des $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K')$, où K' parcourt l'ensemble des sous-corps de K qui sont des sous-extensions finies de $\mathbb{Q}$.

4. Soit N un entier, $N \geqslant 1$. Soient K un sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ qui est une extension *finie* de $\mathbb{Q}$ et $x : \operatorname{Spec} K \to \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$ un élément de $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$. Pour toute place $v \in M_K$, soient x_v^{an} le point de $\mathbb{P}^{d,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_v}$ déterminé par le $\mathbb{Q}$-morphisme de schémas $x_v : \operatorname{Spec} K_v \to \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$ qui est le composé de x avec le morphisme canonique $\operatorname{Spec} K_v \to \operatorname{Spec} K$, et $\|\cdot\|_{x,N,v}$ la norme sur $x_v^*(\mathcal{O}(N)) \cong x^*(\mathcal{O}(N)) \otimes_K K_v$ induite par $\|\cdot\|_{N\varphi_v}(x_v^{\mathrm{an}})$. Montrer que

$$x^*(\overline{\mathcal{O}(N)}) := \big(x^*(\mathcal{O}(N)), (\|\cdot\|_{x,N,v})_{v \in M_K}\big)$$

est un fibré inversible adélique sur $\operatorname{Spec} K$ et que $x^*(\overline{\mathcal{O}(N)}) \cong x^*(\overline{\mathcal{O}(1)})^{\otimes N}$.

5. Pour tout sous-corps K de $\mathbb{Q}^{\mathrm{an}}$ qui est une extension finie de $\mathbb{Q}$, on désigne par

$$h_{\overline{V},K} : \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui envoie $x \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$ en $\widehat{\deg}_n(x^*(\overline{\mathcal{O}(1)}))$. Montrer que, si $K_1 \subset K_2$ sont deux sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{an}}$ qui sont des extensions finies de $\mathbb{Q}$ et si x est un élément de $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K_1)$, alors on a $h_{\overline{V},K_1}(x) = h_{\overline{V},K_2}(x)$. En déduire qu'il existe une unique fonction

$$h_{\overline{V}} : \mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout sous-corps K de $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ qui est une extension finie de $\mathbb{Q}$, la restriction de $h_{\overline{V}}$ à $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(K)$ s'identifie à $h_{\overline{V},K}$.

6. Montrer que, si $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ tel que $L = \mathbb{Q}$, alors on a

$$h_{\overline{V} \otimes \overline{L}} = h_{\overline{V}} + \widehat{\deg}_n(\overline{L}).$$

7. Construre une structurede fibré vectoriel adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_{\mathbb{Q}}}$ sur V telle que

$$h_{\overline{V}}((a_0:\cdots:a_d)) = \max(|a_0|,\ldots,|a_d|)$$

pour tous entiers $a_0,\ldots,a_d$ tels que $\operatorname{pgcd}(a_0,\ldots,a_d)=1$, où $(a_0:\cdots:a_d)$ désigne la classe de $(a_0,\ldots,a_d)$ dans $(\mathbb{Q}^{d+1}\setminus\{0\})/\mathbb{Q}^{\times}$.

8. Soient $(\|\cdot\|'_v)_{v\in M_{\mathbb{Q}}}$ une autre structure de fibré vectoriel adélique sur V et $\overline{V}':=(V,(\|\cdot\|'_v)_{v\in M_{\mathbb{Q}}})$. Montrer que la fonction $|h_{\overline{V}}-h_{\overline{V}'}|$ sur $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{a}})$ est bornée.

9. Montrer que la fonction $h_{\overline{V}}$ est bornée inférieurement.

10. Montrer la propriété de Northcott : pour tout nombre réel B, l'ensemble

$$\{x\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})\,|\,h_{\overline{V}}(x)\leqslant B\}$$

est fini.

11. Montrer que, pour tout entier $\delta\geqslant 1$ et tout nombre réel B, l'ensemble

$$\{x\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{a}})\,|\,h_{\overline{V}}(x)\leqslant B,\ \deg(x)\leqslant\delta\}$$

est fini, où $\deg(x)$ désigne le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps résiduel du point schématique l'image de $x:\operatorname{Spec}\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}\to\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$.

Seconde partie

Dans cette partie, on fixe un sous-schéma fermé et intègre X de $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$. Pour tout entier $N\geqslant 1$, on désigne par E_N l'espace vectoriel $H^0(X,\mathcal{O}(N)|_X)$. Pour toute place $v\in M_{\mathbb{Q}}$, on munit $E_N\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_v\cong H^0(X_{\mathbb{Q}_v},\mathcal{O}(N)_v|_{X_{\mathbb{Q}_v}})$ de la norme $\|\cdot\|_{N,v,\sup}$, définie comme

$$\|s\|_{N,v,\sup}=\sup_{x\in X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_v}}\|s(x)\|_{N\varphi_v}(x).$$

On a vu dans le cours que $\overline{E}_N=(E_N,(\|\cdot\|_{N,v,\sup})_{v\in M_K})$ est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$. Si $N\geqslant 1$ est un entier, $s\in E_n$ est une section non-nul et $x\in X(\mathbb{Q})$ est un point rationnel, pour tout $v\in M_{\mathbb{Q}}$, on désigne par $d_v(s,x)$ le nombre

$$\frac{\|s(x)\|_{N\varphi_v}(x^{\mathrm{an}})}{\|s\|_{N,v,\sup}}.$$

Par définition on a $d_v(s,x)\geqslant 0$, et l'égalité est satisfaite si et seulement si $s(x)=0$.

12. Soient $N\geqslant 1$ un entier et F un sous-espace vectoriel de E_N. Montrer que, si $x\in X(\mathbb{Q}^{\mathrm{a}})$ est en dehors du lieu de base de F, alors on a

$$h_{\overline{V}}(x)\geqslant\frac{1}{N}\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}),$$

où $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})$ désigne la valeur minimale des pentes des fibrés vectoriels adéliques quotients non-nuls de $\overline{F}$.

13. On définit le *minimum essentiel* de X comme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) := \sup_{Y \subsetneq X} \inf_{x \in (X \setminus Y)(\mathbb{Q}^{\mathrm{a}})} h_{\overline{V}}(x),$$

où Y parcourt l'ensemble des sous-schémas fermés stricts de X. Montrer l'inéaglité suivante

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sup_{0 \neq s \in E_N} \widehat{\deg}_n(s) \leqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X).$$

Dans la suite, on fixe $N \geqslant 1$ un entier et s un élément non-nul de E_N.

14. Montrer que $d_v(s,x) \leqslant 1$ pour toute $v \in M_{\mathbb{Q}}$ et tout $x \in X(\mathbb{Q})$.

15. Soit v une place de $\mathbb{Q}$. Soit t_v un nombre réel, $t_v > N$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de points rationnels $x \in X(\mathbb{Q})$ tels que

$$s(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad d_v(s,x) \leqslant H_{\overline{V}}(x)^{-t_v},$$

où $H_{\overline{V}} = \exp(h_{\overline{V}})$.

16. Soient M une famille finie de places de $\mathbb{Q}$. Soit $(t_v)_{v \in M}$ une famille de nombres positifs telle que $\sum_{v \in M} t_v > N$. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de points rationnels $x \in X(\mathbb{Q})$ tels que $s(x) \neq 0$ et que

$$\forall\, v \in M, \quad d_v(s,x) \leqslant H_{\overline{V}}(x)^{-t_v}.$$

Fin de l'épreuve