Université Paris Diderot
L2 Algèbre et analyse approfondies

Contrôle de connaissance du 24 mai 2017

Les documents sur papier sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 27\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Dans toute l'épreuve, on désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $\langle\, , \rangle$. On désigne par N la norme associée à ce produit scalaire, définie comme

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in E, \quad N(x) := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Rappelons que e_i désigne le vecteur dans $\mathbb{R}^3$ dont la $i^{\text{ième}}$ coordonnée est 1 et les autres coordonnées sont nulles.

Première partie

On considère l'endomorphisme $F : E \to E$ qui envoie $(x_1, x_2, x_3) \in E$ sur

$$(-2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

1. Calculer l'adjoint de l'endomorphisme F.

2. L'endomorphisme F est-il auto-adjoint ?

3. Montrer qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'endomorphisme αF soit orthogonal. Déterminer ce nombre.

4. Montrer qu'il existe un et un seul sous-espace vectoriel L de dimension 1 tel que la restriction de αF à L est l'application d'identité. Déterminer ce sous-espace vectoriel.

5. En utilisant la droite L, décrire la nature de l'endomorphisme F.

Deuxième partie

6. Rappelons que la fonction N^2 envoie tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ sur $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer la dérivé partielle $\frac{\partial N^2}{\partial x_i}$ de la fonction N^2 le long de la direction de e_i.

7. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer la dérivé partielle $\frac{\partial N}{\partial x_i}$ de la fonction N le long de la direction de e_i.

8. Montrer que la fonction N^2 est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.

9. Montrer que la fonction N est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle sur $E \setminus \{0\}$.

10. La fonction N est-elle différentiable en 0 ?

11. Montrer que la fonction $\langle\, , \,\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est différentiable et déterminer sa différentielle.

Troisième partie

Pour tout couple $\{x, v\}$ d'éléments dans E tels que $N(x) = N(v) = 1$ et que $\langle x, v\rangle = 0$, on désigne par $f_{x,v}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans E qui envoie $t \in \mathbb{R}$ sur

$$f_{x,v}(t) := \frac{x + tv}{N(x + tv)}.$$

12. Montrer que l'application $f_{x,v}$ est bien définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

13. Déterminer la dérivée de l'application $f_{x,v}$.

14. On considère l'application $f_{x,v} \circ \tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to E$, montrer que cette application s'étend en une courbe paramétrée de classe C^1 de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans E que l'on note $\gamma_{x,v}$.

15. Montrer que la courbe $\gamma_{x,v}$ est paramétrée par la longueur.

16. Déterminer la courbure de la courbe paramétrée $\gamma_{x,v}$.

17. Calculer l'intégrale curviligne de la différentielle de la fonction N le long de la courbe paramétrée $\gamma_{x,v}$.

Quatrième partie

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme $\phi : E \to E$. On désigne par $g : E \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $x \in E$ sur $N(\phi(x))^2$. Soit ϕ^* l'adjoint de l'endomorphisme ϕ. Par définition ϕ^* est un endomorphisme de E tel que

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \quad \langle \phi^*(x), y\rangle = \langle x, \phi(y)\rangle.$$

Soit $G : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ sur

$$g(x) - \lambda(N(x)^2 - 1).$$

18. Montrer que l'endomorphisme composé $\phi^* \circ \phi$ est auto-adjoint.

19. Montrer que toute valeur propre de $\phi^* \circ \phi$ est positive.

20. Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer sa différentielle en utilisant l'endomorphisme $\phi^* \circ \phi$.

21. Montrer que la fonction G est différentiable et déterminer sa différentielle.

22. Montrer que $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ est un point critique de la fonction G si et seulement si x est un vecteur propre de norme 1 de $\phi^* \circ \phi$ dont la valeur propre est λ.

23. Montrer que la fonction G est deux fois différentiable et déterminer sa hessienne.

24. Déterminer l'ensemble des points $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ tels que la hessienne $H_{(x,\lambda)}G$ de G en (x, λ) est une forme bilinéaire positive.

25. Soit λ_0 la valeur minimale de la restriction de la fonction g à l'ensemble

$$\{x \in E \,:\, N(x) = 1\}.$$

Soit x_0 un point dans E tel que $N(x_0) = 1$ et que $g(x_0) = \lambda_0$. Montrer que la restriction de la hessienne $H_{(x_0,\lambda_0)}G$ à $(\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R}) \times (\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R})$ est positive.

26. En utilisant les courbes paramétrées $\gamma_{x_0,h}$ avec $h \in \{x_0\}^\perp$, $N(h) = 1$, montrer que

$$DG(x_0, \lambda_0)(h, 0) = 0$$

pour tout $h \in \{x_0\}^\perp$ tel que $N(h) = 1$.

27. Montrer que (x_0, λ_0) est un point critique de la fonction G. En déduire que x_0 est un vecteur propre de $\phi^* \circ \phi$ de valeur propre λ_0.

Fin de l'épreuve