**Université Paris Diderot**
**L2 Algèbre et analyse approfondies**

**Contrôle de connaissance du 24 mai 2017**

*Les documents sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices,* **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 20\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro $i$, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro $j$. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Dans toute l'épreuve, on fixe un espace vectoriel de rang fini $E$ sur $\mathbb{R}$ et un produit scalaire $\langle\, , \rangle$ sur $E$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie comme

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

On suppose que le rang de $E$ sur $\mathbb{R}$ est supérieur ou égale à 2.

## Première partie

**1.** Montrer que la fonction de $E$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie $x \in E$ sur $\|x\|^2$ est différentiable. Déterminer la différentielle de cette fonction.
**Réponse :** On a

$$\|x+h\|^2 - \|x\|^2 = 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 = 2\langle x, h\rangle + o(\|h\|).$$

Donc la fonction $x \mapsto \|x\|$ est différentiable et sa différentielle en $x \in E$ envoie $h \in E$ sur $2\langle x, h\rangle$.

**2.** Montrer que la fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Déterminer sa différentielle sur $E \setminus \{0\}$.
**Réponse :** La fonction $x \mapsto \|x\|$ est la composée de $x \mapsto \|x\|^2$ avec $t \mapsto \sqrt{t}$. Comme la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur $E$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est différentiable sur $]0, +\infty[$, on obtient que la fonction $x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Par la formule de la différentielle de fonction composée, on obtient que la différentielle de $x \mapsto \|x\|$ en $x \in E \setminus \{0\}$ envoie $h \in E$ sur

$$\frac{1}{\|x\|}\langle x, h\rangle.$$

**3.** La fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est-elle différentiable en 0 ?
**Réponse :** Non. En effet, si cette fonction est différentiable en 0, il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\|x\| = \varphi(x) + o(\|x\|),$$

d'où

$$1 = \frac{\varphi(x)}{\|x\|} + o(1).$$

Cela n'est pas possible si la dimension de $E$ sur $\mathbb{R}$ est $\geqslant 1$.

**4.** Montrer que la fonction $\langle\, ,\, \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est différentiable. Déterminer sa différentielle.
**Réponse :** Soient $(x, y)$ et $(h, l)$ des éléments dans $E \times E$. On a

$$\langle x+h, y+l\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, l\rangle + \langle y, h\rangle + \langle h, l\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, l\rangle + \langle y, h\rangle + o(\|(h, l)\|).$$

Donc la fonction $\langle\, ,\, \rangle$ est différentiable et sa différentiel en $(x, y)$ envoie $(h, l)$ sur $\langle x, l\rangle + \langle y, h\rangle$.

## Deuxième partie

Pour tout couple $\{x, v\}$ d'éléments dans $E$ tels que $\|x\| = \|v\| = 1$ et que $\langle x, v\rangle = 0$, on désigne par $f_{x,v}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $E$ qui envoie $t \in \mathbb{R}$ sur

$$f_{x,v}(t) := \frac{x + tv}{\|x + tv\|}.$$

**5.** Montrer que l'application $f_{x,v}$ est bien définie et est différentiable sur $\mathbb{R}$.
**Réponse :** La fonction $f_{x,v}$ est le produit de $t \mapsto \|x + tv\|^{-1}$ et $t \mapsto x + tv$. Comme $t \mapsto x + tv$ est une application linéaire, elle est différentiable. Comme $t \mapsto \|x + tv\|^{-1}$ est le composé de $t \mapsto x + tv$ et $y \mapsto \|y\|$, elle est différentiable aussi. Donc la fonction $f_{x,v}$ est différentiable.

**6.** Déterminer la différentielle de l'application $f_{x,v}$.
**Réponse :** On a

$$\begin{aligned}
\frac{df_{x,v}}{dt} &= -\frac{1}{\|x + tv\|^3}\langle x + tv, v\rangle(x + tv) + \frac{1}{\|x + tv\|}v \\
&= \frac{t}{\|x + tv\|^3}(x + tv) + \frac{1}{\|x + tv\|}v \\
&= \frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}(x + tv) + \frac{1}{(1 + t^2)^{1/2}}v.
\end{aligned}$$

**7.** On considère l'application $f_{x,v} \circ \tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to E$, montrer que cette application s'étend en une courbe paramétrée de classe $C^1$ de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $E$ que l'on note $\gamma_{x,v}$.
**Réponse :** On a

$$\lim_{t \to \pm\infty} f_{x,v}(t) = \pm v.$$

En outre

$$(f_{x,v} \circ \tan)'(\theta) = \Big(-\frac{\tan(\theta)}{(1 + \tan(\theta)^2)^{3/2}}(x + \tan(\theta)v) + \frac{1}{(1 + \tan(\theta)^2)^{1/2}}v\Big)(1 + \tan(\theta)^2) \neq 0.$$

Donc

$$\lim_{\theta \to \pm\pi/2} (f_{x,v} \circ \tan)'(\theta) = \mp x.$$

**8.** Montrer que la courbe $\gamma_{x,v}$ est paramétrée par sa longueur.
**Réponse :** On a

$$\|(f_{x,v} \circ \tan)'(\theta)\| = \frac{1}{(1+\tan(\theta)^2)^{1/2}} \|v - \tan(\theta)x\| = 1.$$

**9.** Déterminer la courbure de la courbe paramétrée $\gamma_{x,v}$.
**Réponse :** $\kappa = 1$.

**10.** Calculer l'intégrale de la différentielle de la fonction $\|\cdot\|$ le long de la courbe paramétrée $\gamma_{x,v}$.
**Réponse :** 0.

## Troisième partie

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme $\phi : E \to E$. On désigne par $g : E \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $x \in E$ sur $\|\phi(x)\|^2$. Soit $\phi^*$ l'adjoint de l'endomorphisme $\phi$. Par définition $\phi^*$ est un endomorphisme de $E$ tel que

$$\forall\, (x,y) \in E^2, \quad \langle \phi^*(x), y\rangle = \langle x, \phi(y)\rangle.$$

Soit $G : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}$ sur

$$g(x) - \lambda(\|x\|^2 - 1).$$

**11.** Montrer que l'endomorphisme composé $\phi^* \circ \phi$ est auto-adjoint.
**Réponse :** Si $x$ et $y$ sont deux éléments de $E$, on a

$$\langle x, \phi^*(\phi(y))\rangle = \langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \langle \phi^*(\phi(x)), y\rangle.$$

**12.** Montrer que toute valeur propre de $\phi^* \circ \phi$ est positive.
**Réponse :** Soit $\lambda$ une valeur propre de $\phi^* \circ \phi$ dont un vecteur propre est $x$. On a

$$\lambda\|x\|^2 = \langle x, \phi^*(\phi(x))\rangle = \|\phi(x)\|^2,$$

d'où $\lambda \geqslant 0$.

**13.** Montrer que la fonction $g$ est différentiable et exprimer sa différentielle en utilisant l'endomorphisme $\phi^* \circ \phi$.
**Réponse :**

$$g(x+h) - g(x) = \|\phi(x+h)\|^2 - \|\phi(x)\|^2 = 2\langle \phi(x), \phi(h)\rangle + o(\|h\|).$$

Donc $g$ est différentiable et $Dg(x)(h) = 2\langle \phi^*(\phi(x)), h\rangle$.

**14.** Montrer que la fonction $G$ est différentiable et déterminer sa différentielle.
**Réponse :** On a

$$DG(x,\lambda)(h,\mu) = Dg(x)(h) - (\|x\|^2 - 1)\mu - 2\lambda\langle x, h\rangle.$$

**15.** Montrer que $(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}$ est un point critique de la fonction $G$ si et seulement si $x$ est un vecteur propre de norme 1 de $\phi^* \circ \phi$ dont la valeur propre est $\lambda$.
**Réponse :** La forme linéaire $DG(x,\lambda)$ est nulle si et seulement si $\|x\|^2 = 1$ et

$$Dg(x)(h) = 2\langle \phi^*(\phi(x)), h\rangle = 2\lambda\langle x, h\rangle.$$

**16.** Montrer que la fonction $G$ est deux fois différentiable et déterminer sa hessienne.
**Réponse :**

$$\begin{aligned}
&G(x+h,\lambda+\mu) - G(x,\lambda) = g(x+h) - (\lambda+\mu)(\|x+h\|^2 - 1) - (g(x) - \lambda(\|x\|^2 - 1)) \\
&= 2\langle \phi^*(\phi(x)), h\rangle + \|\phi(h)\|^2 - (\lambda+\mu)(\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 - 1) + \lambda(\|x\|^2 - 1) \\
&= DG(x,\lambda)(h,\mu) + \|\phi(h)\|^2 - \lambda\|h\|^2 - 2\mu\langle x, h\rangle + o(\|(h,\mu)\|^2).
\end{aligned}$$

Donc $H_{(x,\lambda)}G((h,\mu),(h,\mu)) = \|\phi(h)\|^2 - \lambda\|h\|^2 - 2\mu\langle x, h\rangle$.

**17.** Déterminer l'ensemble des points $(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}$ tels que la hessienne $H_{(x,\lambda)}G$ de $G$ en $(x,\lambda)$ est une forme bilinéaire positive.
**Réponse :** $\varnothing$.

**18.** Soit $\lambda_0$ la valeur minimale de la restriction de la fonction $g$ à l'ensemble

$$\{x \in E \,:\, \|x\| = 1\}.$$

Soit $x_0$ un point dans $E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et que $g(x_0) = \lambda_0$. Montrer que la restriction de la hessienne $H_{(x_0,\lambda_0)}G$ à $(\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R}) \times (\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R})$ est positive.
**Réponse :** Soit $(h,\mu) \in \{x_0\}^\perp \times \mathbb{R}$. On a

$$H_{(x_0,\lambda_0)}G((h,\mu),(h,\mu)) = \|\phi(h)\|^2 - \lambda_0\|h\|^2 - 2\mu\langle x_0, h\rangle = \|\phi(h)\|^2 - \lambda_0\|h\|^2 \geqslant 0.$$

**19.** En utilisant les courbes paramétrée $\gamma_{x_0,h}$ avec $h \in \{x_0\}^\perp$, $\|h\| = 1$, montrer que

$$DG(x_0,\lambda_0)(h,0) = 0$$

pour tout $h \in \{x_0\}^\perp$ tel que $\|h\| = 1$.

**20.** Montrer que $(x_0,\lambda_0)$ est un point critique de la fonction $G$. En déduire que $x_0$ est un vecteur propre de $\phi^* \circ \phi$ de valeur propre $\lambda_0$.

*Fin de l'épreuve*