CHAPITRE 4

CATÉGORIE DÉRIVÉE

4.1. Catégories des complexes

Dans ce paragraphe, on fixe une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

4.1.1. Complexe de cochaînes. — On appelle *complexe de cochaînes* de $\mathcal{A}$ tout diagramme de la forme

$$(A, d) : \ \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

tel que $d_n d_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le morphisme $d_n : A_n \to A_{n+1}$ est appelé $n^{ième}$ *morphisme de cobord*. S'il n'y pas d'ambiguïté sur la famille de morphisme $d = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on utilise simplement l'expression A pour désigner le complexe de cochaînes (A, d).

Soient A et B deux complexes de cochaînes. On appelle *morphisme* de A vers B toute famille $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de morphismes dans la catégorie $\mathcal{A}$, où chaque f_n est un morphisme de A_n vers B_n, telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] & B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ainsi les complexes de cochaînes et leurs morphismes forment une catégorie que l'on note comme $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. C'est une catégorie abélienne.

4.1.2. Foncteur de décalage. — Soit (A, d) un complexe de cochaînes de $\mathcal{A}$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on désigne par $(A[m], d[m])$ le complexe de cochaînes tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad A[m]_n = A_{n-m}, \quad d[m]_n = (-1)^m d_{n-m}.$$

La correspondance $(A, d) \mapsto (A[m], d[m])$ définit alors un foncteur de la catégorie $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$ vers elle-même que l'on note $[m]$. Par définition, on a $[m][m'] = [m+m']$ pour tout $(m, m') \in \mathbb{Z}^2$.

4.1.3. Foncteurs de cohomologie. — Soient (A, d) un complexe de cochaînes dans $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $H^n(A) = \operatorname{Ker}(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n-1})$, appelée $n^{ième}$ *cohomologie* de A. Il s'avère que H^n définit un foncteur de $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}$. Par définition, on a $H^n[m] = H^{n-m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

4.1.4. Théorème. — *Soit* $\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$ *un suite exacte dans la catégorie* $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. *Alors on a une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. — Soit n un entier. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^A"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^B"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^C"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. D'après le théorème 3.4.5, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_n^A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(d_n^B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(d_n^C) \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^A"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^B"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^C"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
& \operatorname{Coker}(d_n^A) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(d_n^B) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(d_n^C) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd},$$

qui conduit à un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Coker}(d_{n-1}^A) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n^A"] & \operatorname{Coker}(d_{n-1}^B) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n^B"] & \operatorname{Coker}(d_{n-1}^C) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n^C"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n+1}^A) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n+1}^B) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n+1}^C) &
\end{tikzcd}$$

Il s'avère que $H^n(A)$ est le noyau de δ_n^A et $H^{n+1}(A)$ est le conoyau de δ_n^A. Encore par le théorèm 3.4.5 on obtient le résultat. $\square$

4.1.5. Homotopie. — Soient (A, d^A) et (B, d^B) deux complexes de cochaînes, et f, g deux morphismes de A vers B. On appelle *homotopie* de f vers g toute famille $s = (s_n : A_n \to B_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ de morphismes dans $\mathcal{A}$, comme montré par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "d^A_{n-1}"] & A_n \arrow[r, "d^A_n"] \arrow[dl, "s_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, "d^B_{n-1}"'] & B_n \arrow[r, "d^B_n"'] & B_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui satisfait à la condition suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad f_n - g_n = s_{n+1} d^A_n + d^B_{n-1} s_n.$$

S'il existe une homotopie de f vers g, on dit que f et g sont *homotopes*, noté $f \sim g$.

4.1.6. Proposition. — *Soit A et B deux complexes de cochaînes dans $\mathcal{A}$.*

(1) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$. En outre, l'ensemble quotient $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)/\sim$ peut être muni d'une structure de groupe quotient de $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

(2) Soient f et g sont deux morphismes dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$ qui sont homotopes. Pour tout morphisme $h : B \to C$ dans la catégorie $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$, on a $hf \sim hg$; pour tout morphisme $i : D \to A$ de $\mathcal{A}$, on a $fi \sim gi$.

Démonstration. — (1) Soient f et g deux morphismes de A vers B. Toute famille $s = (s_n : A^n \to B^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une homotopie de f vers g si et seulement si elle est une homotopie de $f - g$ vers le morphisme nul 0. En outre, si s est une homotopie de f vers g, alors $-s = (-s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une homotopie de $g - f$ vers 0. Par conséquent, l'ensemble des morphismes homotopiques à 0 forment un sous-groupe de $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$. En outre, le quotient de $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$ par ce sous-groupe s'identifie à $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)/\sim$.

(2) □

4.1.7. Catégorie homotopique. — La relation d'équivalence homotopique permet de construire une nouvelle catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ comme suit. Les objets de $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ sont des complexes de cochaînes de $\mathcal{A}$. Pour tout couple (A, B) de complexes de cochaînes, $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}(A, B)$ est l'ensemble quotient $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)/\sim$ défini dans la proposition 4.1.6. Si A, B et C sont trois complexes de cochaînes de $\mathcal{A}$, alors l'application de composition

$$\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

induit par passage aux quotient l'application de composition

$$\mathbf{K}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathbf{K}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

dans la catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$.

Soient A et B deux complexes de cochaînes, et $f : A \to B$ un morphisme dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}(A, B)$. Si l'image de f dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}(A, B)$ est un élément inversible, on dit que f

est une *équivalence d'homotopie* entre A et B. Si les objets A et B sont isomorphes dans la catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$, on dit que A et B sont *homotopiquement équivalents.*

On désigne par ϖ le foncteur de $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$ dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ qui envoie tout complexe de cochaînes A sur lui-même et tout morphisme de complexes sur sa classe d'homotopie.

4.1.8. Cylindres. — Soit (A, d^A) un complexe de cochaînes. On désigne par $\mathrm{cyl}(A)$ le complexe de cochaînes défini comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le $n^{\text{ième}}$ composante du complexe $\mathrm{cyl}(A)$ est $A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n$; le $n^{\text{ième}}$ morphisme de cobord $d_n : A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n \to A_{n+1} \oplus A_{n+2} \oplus A_{n+1}$ est déterminé par la matrice

$$\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix}.$$

La relation $d_n d_{n-1} = 0$ est assurée par la formule suivante

$$\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{n-1}^A & 1_{A_n} & 0 \\ 0 & -d_n^A & 0 \\ 0 & -1_{A_n} & d_{n-1}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n^A d_{n-1}^A & d_A^n - d_A^n & 0 \\ 0 & d_{n+1}^A d_n^A & 0 \\ 0 & d_n^A - d_n^A & d_n^A d_{n-1}^A \end{pmatrix}$$

dont le terme à droite est la matrice nulle.

Le complexe de cochaînes A est homotopiquement équivalent à son cylindre. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soient $\alpha_n : A_n \to A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n$ le morphisme $(0, 0, 1_{A_n})$, et $\beta_n : A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n \to A_n$ la somme des projections aux première et troisième coordonnées respectivement. Alors les familles $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des morphismes dans la catégorie $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{A_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_n^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{A_{n+1}} \end{pmatrix} d_n^A$$

et

$$\begin{pmatrix} 1_{A_{n+1}} & 0 & 1_{A_{n+1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n^A & 0 & d_n^A \end{pmatrix} = d_n^A \begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix}.$$

Par définition, le composé $\beta\alpha$ est le morphisme d'identité du complexe de cochaînes A. En outre, $\alpha\beta$ est homotopique au morphisme d'identité de $\mathrm{cyl}(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $s_n : A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n \to A_{n-1} \oplus A_n \oplus A_{n-1}$ le morphisme défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme $s_{n+1}d_n + d_{n-1}s_n : A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n \to A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n$ est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1_{A_{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{n-1}^A & 1_{A_n} & 0 \\ 0 & -d_n^A & 0 \\ 0 & -1_{A_n} & d_{n-1}^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est égale à

$$\begin{pmatrix} -1_{A_n} & 0 & 0 \\ -d_n^A + d_n^A & -1_{A_{n+1}} & 0 \\ 1_{A_n} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & 0 \\ 1_{A_n} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme $\alpha_n\beta_n - 1_{\mathrm{cyl}(A)_n}$ correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{A_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{A_n} & 0 & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & 0 \\ 1_{A_n} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $\alpha_n\beta_n - 1_{\mathrm{cyl(A)_n}} = s_{n+1}d_n + d_{n-1}s_n$, d'où $\alpha\beta \sim 1_{\mathrm{cyl(A)}}$.

4.1.9. Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $F : \mathbf{Com}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}$ est un foncteur qui envoie tout équivalence d'homotopie sur un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : \mathbf{K}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}$ tel que $F = \widetilde{F}\varpi$.*

Démonstration. — Soient A et B deux complexes de cochaînes et f et g deux morphismes de complexes. Soient $\mathrm{cyl}(A)$ le cylindre de A, et $\alpha : A \to \mathrm{cyl}(A)$ et $\beta : \mathrm{cyl}(A) \to A$ des morphismes définis dans §4.1.8. On a vu que α est une équivalence d'homotopie, d'où $F(\alpha)$ est un isomorphisme. Comme $\beta\alpha = 1_A$, on a $F(\beta)F(\alpha) = 1_{F(A)}$. Donc $F(\beta)$ est l'inverse de $F(\alpha)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\alpha'_n = (1_{A_n}, 0, 0) : A_n \to A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n$. Alors $\alpha' = (\alpha'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de A vers $\mathrm{cyl}(A)$ dans la catégorie $\mathbf{Com}(\mathcal{A})$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -1_{A_{n+1}} & d_n^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_{A_n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n^A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{A_{n+1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d_n^A.$$

En outre, comme $\beta\alpha' = 1_A$, on obtient que $F(\beta)$ est aussi l'inverse de $F(\alpha')$. Par conséquent, on a $F(\alpha) = F(\alpha')$.

On suppose que les morphismes $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont homotope et que $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une homotopie entre f et g. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, soit γ_n :

$A_n \oplus A_{n+1} \oplus A_n \to B_n$ le morphisme défini par la matrice $\begin{pmatrix} f_n & s_{n+1} & g_n \end{pmatrix}$. Alors $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes de cochaînes car, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\gamma_n d_{n-1} = \begin{pmatrix} f_n & s_{n+1} & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^A_{n-1} & 1_{A_n} & 0 \\ 0 & -d^A_n & 0 \\ 0 & -1_{A_n} & d^A_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_n d^A_{n-1} \\ f_n - g_n - s_{n+1} d^A_n \\ g_n d^A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^B_{n-1} f_{n-1} & d^B_{n-1} s_n & d^B_{n-1} g_{n-1} \end{pmatrix} = d^B_{n-1}\gamma_{n-1}.$$

En outre, on a $\gamma\alpha' = f$ et $\gamma\alpha = g$. Donc

$$F(f) = F(\gamma)F(\alpha') = F(\gamma)F(\alpha) = F(g).$$

On obtient donc que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Com}(\mathcal{A})}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$ définie par F se factorise de façon unique par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(A, B)$. Il existe donc un unique foncteur $\widetilde{F} : \mathbf{K}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}$ tel que $F = \widetilde{F}\varpi$. □

4.1.10. Cône. — Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes de cochaînes. On désigne par $\mathrm{cône}(f)$ le complexe de cochaînes tel que $\mathrm{cône}(f)_n = A_{n+1} \oplus B_n$ et que le morphisme de cobord est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} -d^A_{n+1} & 0 \\ -f_{n+1} & d^B_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{pmatrix} -d^A_{n+2} & 0 \\ -f_{n+2} & d^B_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^A_{n+1} & 0 \\ -f_{n+1} & d^B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^A_{n+2} d^A_{n+1} & 0 \\ f_{n+2} d^A_{n+1} - d^B_{n+1} f_{n+1} & d^B_{n+1} d^B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.11. Proposition. — *Soit $f : A \to B$ un morphisme dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. On a une suite exacte*

$$\mathbf{0} \longrightarrow B \xrightarrow{g} \mathrm{cône}(f) \xrightarrow{\delta} A[-1] \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : B_n \to A_{n+1} \oplus B_n$ correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{B_n} \end{pmatrix}$, et $\delta_n : A_{n+1} \oplus B_n \to A_{n+1}$ est la première projection, qui correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$. Le triplet (f, g, δ) est appelé triangle associé à f.

Démonstration. — Pour tout entier n, le diagramme

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_n \xrightarrow{g_n} A_{n+1} \oplus B_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n+1} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une suite exacte dans $\mathcal{A}$. Il suffit de vérifier que g et δ sont des morphismes de complexes de cochaînes. Pour tout entier n, on a

$$\begin{pmatrix} -d^A_{n+1} & 0 \\ -f_{n+1} & d^B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d^B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{B_{n+1}} \end{pmatrix} d^B_n$$

et

$$\begin{pmatrix} 1_{A_{n+2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^A_{n+1} & 0 \\ -f_{n+1} & d^B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^A_{n+1} & 0 \end{pmatrix} = -d^A_{n+1} \begin{pmatrix} 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

4.1.12. D'après le théorème 4.1.4, on a une suite exacte

$$\cdots \to H^{n-1}(\text{cône}(f)) \longrightarrow H^n(A) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B) \longrightarrow H^n(\text{cône}(f)) \longrightarrow H^{n+1}(A) \to \cdots$$

En d'autre termes, $H^n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\text{cône}(f)$ est une suite exacte.

4.1.13. Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes de cochaînes. On dit que f est un *quasi-isomorphisme* si $H^n(f)$ est un isomorphisme pour tout n, ou de façon équivalente, $\text{cône}(f)$ est une suite exacte.

4.1.14. Soient

$$A' \xrightarrow{u} B' \xrightarrow{v} C' \xrightarrow{w} A'[-1]$$

des morphismes de complexes de cochaînes. S'il existe des équivalences d'homotopie α, β et γ tel que le diagramme suivant dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & B' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & A'[-1] \arrow[d, "\alpha[-1]"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & \text{cône}(f) \arrow[r, "\delta"'] & A[-1] \end{tikzcd},$$

où $f : A \to B$ est un morphisme de complexes de cochaînes et (f, g, δ) est le triangle exacte associé à f, on dit que (u, v, w) est un triangle exact de (A', B', C').

4.1.15. Proposition. — *Soient A, B et C des complexes de cochaînes et (u, v, w) un triangle exact de (A, B, C), alors il induit une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

4.2. Catégorie triangulée

4.2.1. Soit $\mathbf{K}$ une catégorie additive munie d'un automorphisme $T : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$. On appelle *triangle* dans $\mathbf{K}$ tout diagramme de la forme

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$$

dans $\mathbf{K}$. Un tel triangle est aussi noté (u, v, w).

Si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ et $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C' \xrightarrow{w'} T(A')$ sont deux triangles dans $\mathbf{K}$. S'il existe des isomorphismes $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$ et $\gamma : C \to C'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & T(A') \end{tikzcd}$$

on dit que les triangles (u, v, w) et (u', v', w') sont isomorphes, noté $(u, v, w) \cong (u', v', w')$.

4.2.2. On appelle *catégorie triangulée* tout couple $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$, où $\mathbf{K}$ est une catégorie exacte et $\mathcal{E}$ est un ensemble de triangles dans $\mathbf{K}$ (appelés triangles distingués), qui vérifie les axiomes suivants.

(1) Pour tout morphisme $u : A \to B$ dans $\mathbf{K}$, il existe des morphismes v et w dans $\mathbf{K}$ tel que (u, v, w) soit un triangle dans $\mathcal{E}$.

(2) Pour tout objet A de $\mathbf{K}$, le triangle $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{0} T(A)$ appartient à $\mathcal{E}$.

(3) Si $(u, v, w) \in \mathcal{E}$ et si (u', v', w') est un triangle isomorphe à (u, v, w), alors (u', v', w') appartient à $\mathcal{E}$.

(4) Si $(u, v, w) \in \mathcal{E}$, alors $(v, w, -T(u)) \in \mathcal{E}$ et $(-T^{-1}(w), u, v) \in \mathcal{E}$.

(5) Si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ et $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C' \xrightarrow{w'} T(A')$ sont deux triangles dans $\mathcal{E}$ et s'il existe des morphismes $f : A \to A'$ et $g : B \to B'$ tels que $gu = u'f$, alors il existe un morphisme $h : C \to C'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' \arrow[r, "w'"'] & T(A') \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(6) (**Axiome octaédrique**) Si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} C' \xrightarrow{\partial} T(A)$, $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{x} A' \xrightarrow{i} T(B)$ et $A \xrightarrow{vu} C \xrightarrow{y} B' \xrightarrow{\delta} T(A)$ trois triangles dans $\mathcal{C}$, alors il existe des morphismes $f : C' \to B'$ et $g : B' \to A'$ dans $\mathbf{K}$ tel que le diagramme $C' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} A' \xrightarrow{T(j)i} T(C')$ soit un triangle dans $\mathcal{E}$ et que les égalités $\partial = \delta f$, $x = gy$, $yv = fj$ et $T(u)\delta = ig$ soient satisfaites.

L'axiome octaédrique peut être illustré par le diagramme suivant, d'où vient son nom.

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dl, "x"'] \arrow[ddr, "y"] & \\
B \arrow[urr, "v"] \arrow[dr, "j"'] & A' \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "T(j)i"'] & & \\
 & C' \arrow[uur, dotted, "\partial"] \arrow[rr, "f"'] & & B' \arrow[uul, "g"'] \arrow[uu, dotted, "vu"] \arrow[ull, dotted, "\delta"] \\
 & & A \arrow[ul, dotted, "u"] &
\end{tikzcd}$$

4.2.3. Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ un triangle dans $\mathcal{E}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

qui peut être inscrit dans un diagramme commutatif (d'après l'axiome (5) du §4.2.2)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & T(A) \arrow[d, "1_{T(A)}"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r, "w"'] & T(A)
\end{tikzcd},$$

dont les lignes sont des triangles distingués. On en déduit $vu = 0$. En utilisant l'axiome (4) on en déduit que $wv = 0$ et $T(u)w = 0$.

4.2.4. Définition. — Soient $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $H : \mathbf{K} \to \mathcal{A}$ un foncteur. On dit que H est un *foncteur de cohomologie* si, pour tout triangle $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ dans $\mathcal{C}$, le foncteur H induit une suite exacte $H(A) \xrightarrow{H(u)} H(B) \xrightarrow{H(v)} H(C)$ dans $\mathcal{A}$.

D'après l'axiome (4) du §4.2.2, on obtient que, si H est un foncteur de cohomologie, pour tout triangle $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ dans $\mathcal{C}$, H induit une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

où pour tout objet $X \in \mathbf{K}$ et tout entier n, $H^n(X)$ est défini comme $H(T^n(X))$.

4.2.5. Exemple. — Soit $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée et X un objet de $\mathbf{K}$, alors $h_X : \mathbf{K} \to \mathbf{Ab}$ est un foncteur de cohomologie. En effet, si

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$$

est un triangle dans $\mathcal{E}$, alors on a $h_X(v)h_X(u) = h_X(vu) = 0$. Si $f : X \to B$ est un morphisme tel que $h_X(v)(f) = vf = 0$, on a un diagramme dont le carré est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{0} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & T(X) \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r, "w"'] & T(A)
\end{tikzcd}$$

D'après les axiomes (3) et (4) du §4.2.2, il existe un morphisme $g : X \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{0} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & T(X) \arrow[d, "T(g)"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r, "w"'] & T(A)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. On obtient donc $f = ug$.

4.2.6. Proposition. — *Soient $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée. Supposons que*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & T(A) \arrow[d, "T(a)"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & T(A')
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de morphismes dans $\mathbf{K}$ dont les lignes sont des triangles distingués. Si a et b sont des isomorphismes, alors il en est de même de c.

Démonstration. — Pour tout objet X de $\mathbf{K}$, on a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
h_X(A) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(a)"] & h_X(B) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(b)"] & h_X(C) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(c)"] & h_X(T(A)) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(T(a))"] & h_X(T(B)) \arrow[d, "h_X(T(b))"] \\
h_X(A') \arrow[r] & h_X(B') \arrow[r] & h_X(C') \arrow[r] & h_X(T(A')) \arrow[r] & h_X(T(B'))
\end{tikzcd}$$

On obtient donc par le lemme des cinq que $h_X(c)$ est un isomorphisme. Comme X est arbitraire, c est un isomorphisme. □

4.2.7. Corollaire. — *Soient $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée. Pour tout morphisme u dans $\mathbf{K}$, à un (non-nécessairement unique) isomorphisme près, il n'y a qu'un seul triangle dans $\mathcal{E}$ dont le premier morphisme s'identifie à u.*

4.2.8. Théorème. — *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{E}$ l'ensemble des triangles exacts dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$. Alors $(\mathbf{K}_{\mathcal{A}}, \mathcal{E})$ est une catégorie triangulée.*

4.3. Localisation

4.3.1. Système multiplicatif. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un ensemble de morphismes dans $\mathcal{C}$. On dit que S est un *système multiplicatif* dans $\mathcal{C}$ si les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) S continent les morphismes d'identité, et est stable par composition.

(2) (condition d'Ore) Si $\alpha : Z \to Y$ est un morphisme dans S, pour tout morphisme $g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

de morphismes dans $\mathcal{C}$ avec $\beta \in S$; pour tout morphisme $i : Z \to A$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

avec $\gamma \in S$.

(3) Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ des morphismes dans $\mathcal{C}$. Il existe $s \in S$ tel que $sf = sg$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $ft = gt$.

4.3.2. Remarque. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un ensemble de morphismes dans $\mathcal{C}$. Alors S est un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$ si et seulement si, vu comme un ensemble de morphismes dans $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$, il est un système multiplicatif dans $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$.

4.3.3. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un système multiplicatif S. Si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}$, on appelle *fraction* de X vers Y tout diagramme de la forme

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y \ ,$$

où f est un morphisme dans $\mathcal{C}$ et $s \in S$. Deux fractions $X \xleftarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{f_1} Y$ et $X \xleftarrow{s_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} Y$ de X vers Y sont dites *équivalente* et on note

$$(\ X \xleftarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{f_1} Y\ ) \sim (\ X \xleftarrow{s_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} Y\ )$$

s'il existe une troisième fraction $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ et des morphismes $\alpha_1 : Z \to Z_1$ et $\alpha_2 : Z \to Z_2$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & Y \\
 & Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

4.3.4. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, S un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$, X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fractions de X vers Y.*

Démonstration. — Par définition, on obtient que la relation $\sim$ est reflexive et symétrique. Dans la suite, on montre que la relation $\sim$ est transitive. Soient

$$X_i \xleftarrow{s_i} X \xrightarrow{f_i} Y \ , \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

trois fractions de X dans Y. On suppose que

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y \ \text{ et } \ X \xleftarrow{s'} Z' \xrightarrow{f'} Y$$

sont des fractions de X vers Y, $\alpha_1 : Z \to Z_1$, $\alpha_2 : Z \to Z_2$, $\alpha'_2 : Z' \to Z_2$ et $\alpha'_3 : Z' \to Z_3$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & Y \\
 & Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
 & Z_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & Z' \arrow[l, "s'"'] \arrow[r, "f'"] \arrow[u, "\alpha'_2"] \arrow[d, "\alpha'_3"] & Y \\
 & Z_3 \arrow[ul, "s_3"] \arrow[ur, "f_3"'] &
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs. D'après la condition (2) de système multiplicatif (cf. §4.3.1), il existe un objet W de $\mathcal{C}$ et des morphismes $\gamma : W \to Z$ et $\gamma' : W \to Z'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma'"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
Z' \arrow[r, "s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et que $\gamma \in S$. On a

$$s_2\alpha_2\gamma = s\gamma = s'\gamma' = s_2\alpha'_2\gamma'.$$

D'après la condition (3) de système multiplicatif (cf. §4.3.1), il existe un morphisme $t_2 : W' \to W$ dans S tel que $\alpha_2\gamma t_2 = \alpha'_2\gamma' t_2$.

On considère la fraction

$$X \xleftarrow{\ t\ } W' \xrightarrow{\ g\ } Y$$

avec $t = s\gamma t_2 \in S$ et $g = f\gamma t_2$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & W' \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\alpha_1\gamma t_2"] \arrow[d, "\alpha'_3\gamma' t_2"] & Y \\
 & Z_3 \arrow[ul, "s_3"] \arrow[ur, "f_3"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, on a

$$s_1\alpha_1\gamma t_2 = s\gamma t_2 = t, \quad s_3\alpha'_3\gamma' t_2 = s_2\alpha'_2\gamma' t_2 = s_2\alpha_2\gamma t_2 = s\gamma t_2 = t,$$
$$f_1\alpha_1\gamma t_2 = f\gamma t_2 = g, \quad f_3\alpha'_3\gamma' t_2 = f_2\alpha'_2\gamma' t_2 = f_2\alpha_2\gamma t_2 = f\gamma t_2 = g.$$

La transitivité de la relation $\sim$ est donc démontrée. □

4.3.5. Définition. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$. Pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, on désigne par $S^{-1}\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fractions de X dans Y modulo la relation d'équivalence $\sim$.

4.3.6. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$. Si X, Y et Z sont trois objets de $\mathcal{C}$ et si

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & W_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

sont des fractions de X vers Y et de Y vers Z respectivement, où s_1 et s_2 appartiennent à S. D'après la condition (2) de système multiplicatif, il existe un objet W_3 de $\mathcal{C}$, un morphisme $s_3 : W_3 \to W_1$ dans S et un morphisme $f_3 : W_3 \to W_2$ dans $\mathcal{C}$ tel que $s_2 f_3 = f_1 s_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & & W_3 \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "f_3"] & & \\
 & W_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & W_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Ainsi $X \xleftarrow{s_1 s_3} W_3 \xrightarrow{f_2 f_3} Z$ est une fraction de X vers Z. Il s'avère que cette construction induit par passage au quotient une application (on laisse les détails de vérification aux lecteurs)

$$S^{-1}\mathcal{C}(X,Y) \times S^{-1}(Y,Z) \longrightarrow S^{-1}\mathcal{C}(X,Z)$$

de sorte que les objets de $\mathcal{C}$ et les $S^{-1}(X,Y)$ avec $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$ forment une catégorie que l'on note $S^{-1}\mathcal{C}$ est appelle *localisation* de $\mathcal{C}$ par rapport à S. On a un foncteur $q : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ qui envoie tout objet $X \in \mathcal{C}$ sur lui-même (vu comme un objet de $S^{-1}\mathcal{C}$) et qui envoie, pour tout couple d'objets $(X,Y) \in \mathcal{C}^2$ et tout morphisme $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ sur la classe d'équivalence de la fraction

$$X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y \ .$$

Pour tout morphisme $(s : X \to Y) \in S$, le morphisme $q(s)$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$ est inversible, son inverse est la classe de la fraction

$$Y \xleftarrow{s} X \xrightarrow{1_X} X$$

4.3.7. Remarque. — Soit f et g deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Par définition, l'égalité $q(f) = q(g)$ est vérifiée dans la catégorie localisée $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un morphisme $s \in S$ tel que $sf = sg$. Cela est aussi équivalent à l'existence d'un morphisme $t \in S$ tel que $ft = gt$ (d'après la condition (3) de système multiplicatif, cf. §4.3.1).

Soient X, Y_1 et Y_2 trois objets de $\mathcal{C}$. Si α_1 et α_2 sont des éléments de $S^{-1}\mathcal{C}(X,Y_1)$ et $S^{-1}\mathcal{C}(X,Y_2)$, représentés par les fractions

$$X \xleftarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \quad \text{et} \quad X \xleftarrow{s_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} Y_2$$

respectivement, par la condition (2) de système multiplicatif (cf. §4.3.1), il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & Z_1 \arrow[d, "s_1"] \\ Z_2 \arrow[r, "s_2"'] & X \end{tikzcd}$$

avec $t_1 \in S$. On obtient alors que $s = s_1 t_1 = s_2 t_2 \in S$. En outre, les classes α_1 et α_2 sont représentées par les fractions

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f_1 t_1} Y_1 \quad \text{et} \quad X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f_2 t_2} Y_2$$

respectivement. On en déduit que, pour une famille *finie* de morphismes dans la catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ qui sont de même source. On peut trouver des fractions représentant ces morphismes qui commencent par le même morphisme dans S.

4.3.8. Théorème (Gabriel-Zisman). — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et S un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur tel que, pour tout $s \in S$, $F(s)$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{D}$, alors il existe un unique foncteur $S^{-1}F : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F = (S^{-1}F)q$.*

Démonstration. — Si le foncteur $S^{-1}F$ existe, il est unique car il doit envoyer tout objet X de $\mathcal{C}$ sur $F(X) \in \mathcal{D}$ et toute classe de fractions

$$[\ X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y\ ], \quad s \in S$$

sur $F(f)F(s)^{-1}$. Il reste à vérifier que cette construction définit effectivement un foncteur de $S^{-1}\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Soient

$$X \xleftarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{f_1} Y \quad \text{et} \quad X \xleftarrow{s_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} Y$$

deux fractions qui sont équivalentes. Par définition il existe une troisième fraction $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ et des morphismes $\alpha_1 : Z \to Z_1$ et $\alpha_2 : Z \to Z_2$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & Y \\
 & Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} F(f_1)F(s_1)^{-1} &= F(f_1)F(\alpha_1)F(s)^{-1} = F(f)F(s)^{-1} \\ &= F(f_2)F(\alpha_2)F(s)^{-1} = F(f_2)F(s_2)^{-1}. \end{aligned}$$

L'application $S^{-1}F : S^{-1}\mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X),F(Y))$,

$$[\ X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y\ ] \longmapsto F(f)F(s)^{-1}$$

est donc bien définie et sa composition avec $q : \mathcal{C}(X,Y) \to S^{-1}\mathcal{C}(X,Y)$ coïncide avec $F : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X),F(Y))$ par définition. En particulier, $S^{-1}F$ envoie le morphisme d'identité de X (dans la catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$) sur le morphisme d'identité de $F(X)$. Enfin, pour tout diagramme de la forme (4.1) dans $\mathcal{C}$, on a $F(s_2)^{-1}F(f_1) = F(f_3)F(s_3)^{-1}$ et donc

$$F(f_2)F(s_2)^{-1}F(f_1)F(s_1)^{-1} = F(f_2f_3)F(s_1s_3)^{-1}.$$

On obtient que $S^{-1}F$ préserve les compositions de morphismes et donc définit un foncteur de $S^{-1}\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ tel que $(S^{-1}F)q = F$. Le théorème est alors démontré. $\square$

4.3.9. Remarque. —

(1) Deux morphismes $f : X \to$ et $g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ induisent le même morphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sf = sg$.

(2) Le foncteur canonique $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ préserve les objets initiaux, les objets terminaux et les coproduits finis, pourvu que ces constructions existent dans $\mathcal{C}$.

(3) On suppose que $\mathcal{C}$ a un objet nul. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, X est un objet nul dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement si $0 : X \to X$ appartient à S.

(4) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, il en est de même de $S^{-1}\mathcal{C}$.

4.3.10. Soient $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $H : \mathbf{K} \to \mathcal{A}$ un foncteur de cohomologie. On désigne par S_H l'ensemble des morphismes s dans $\mathbf{K}$ tels que $H(T^n(s))$ soit un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4.3.11. Proposition. — *On garde les notations du §4.3.10. L'ensemble S_H est un système multiplicatif dans $\mathbf{K}$.*

Démonstration. — La vérification de l'axiome (1) est facile.

(2) Soit $s : Z \to Y$ un morphisme dans S_H, qui s'inscrit dans un triangle distingué

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\delta} T(Z) \ .$$

Soit $f : X \to Y$ un morphisme arbitraire dans $\mathbf{K}$. On inscrit $uf : X \to A$ dans un triangle distingué

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{uf} A \xrightarrow{w} T(W)$$

Il existe alors un morphisme $g : W \to Z$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "uf"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_X"] & T(W) \arrow[d, "T(g)"] \\
Z \arrow[r, "s"'] & Y \arrow[r, "u"'] & A \arrow[r, "\delta"'] & T(Z)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme $H(T^n(s))$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient que $H(T^n(A)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'où $H(T^n(t))$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, i.e., t est un élément de S_H.

(3) Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{K}$. On montre que, s'il existe $(s : Y \to Y') \in S_H$ tel que $sf = 0$, alors il existe $t \in S_H$ tel que $ft = 0$. On inscrit s dans un triangle distingué $Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{s} Y' \xrightarrow{w} T(Z)$. Comme h_X est un foncteur de cohomologie, on obtient que la suite $\mathbf{K}(X, Z) \xrightarrow{h_X(u)} \mathbf{K}(X, Y) \xrightarrow{h_X(s)} \mathbf{K}(X, Y')$ est exacte. Comme $sf = 0$, il existe $h : X \to Z$ tel que $f = uh$. On inscrit h dans un triangle distingué $X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{\gamma} T(X')$. On a $ft = uht = 0$. En outre, comme $s \in S_H$, on a $H(T^n(Z)) = \mathbf{0}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'où $t \in S_H$. $\square$

4.3.12. On construit une famille $S_H^{-1}\mathcal{E}$ de triangles dans la catégorie $S_H^{-1}\mathbf{K}$. Soient $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ et $\gamma : C \to T(A)$ des morphismes dans $S_H^{-1}\mathbf{K}$, représentés par les fractions $A \xleftarrow{s_1} A' \xrightarrow{u} B$, $B \xleftarrow{s_2} B' \xrightarrow{v} C$ et $C \xleftarrow{s_3} C' \xrightarrow{w} T(A)$ respectivement. Le triangle $(\alpha, \beta, \gamma) \in S_H^{-1}\mathcal{E}$ si et seulement s'il est isomorphe à l'image d'un triangle dans $\mathcal{E}$.

4.3.13. Proposition. — *Soient* $(\mathbf{K}, \mathcal{E})$ *une catégorie triangulée et* H *un foncteur de cohomologie. Alors* $(S_H^{-1}\mathbf{K}, S_H^{-1}\mathcal{E})$ *est une catégorie triangulée.*

4.4. Catégorie dérivée

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On désigne par $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}$ la localisation de $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ par rapport au système multiplicatif défini par le foncteur de cohomologie H^0. Les catégorie $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^+$, $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^-$ et $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ sont définies de façon similaires. Ce sont des catégorie triangulée.

4.4.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit qu'un objet I de $\mathcal{A}$ est injectif si le foncteur $h_I^\circ : \mathcal{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$ est exact. Si $f : A \to B$ est un monomorphisme et si $\alpha : A \to I$ est un morphisme, alors il existe $\beta : B \to I$ tel que $\alpha = \beta f$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

4.4.2. Définition. — Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs si, pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ il existe un objet injectif I de $\mathcal{A}$ et un monomorphisme $A \to I$.

4.4.3. Théorème. — *Soient* $\mathcal{A}$ *une catégorie abélienne et* A *un objet de* $\mathcal{A}$*. Si* I_A *est un complexe de cochaînes de la forme*

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{d_{-1}} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

où les I_n *sont des objets injectifs, pour tout complexe de cochaînes* exact M_B *de la forme*

$$\mathbf{0} \longrightarrow B \xrightarrow{\partial_{-1}} M_0 \xrightarrow{\partial_0} M_1 \xrightarrow{\partial_1} \cdots ,$$

tout morphisme $f : B \to A$ *dans* $\mathcal{A}$ *se relève en un morphisme de complexes de* M_B *dans* I_A*, qui est unique à équivalence homotopique près.*

Démonstration. — On construit par récurrence les morphismes $f_n : M_n \to I_n$. L'existence de $f_0 : M_0 \to I_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & B \arrow[r, "\partial_{-1}"] \arrow[d, "f"'] & M_0 \arrow[d, "f_0"] \\ & A \arrow[r, "d_{-1}"'] & I_0 \end{tikzcd}$$

soit commutatif provient de l'hypothèse que I_0 est un objet injectif. Pour le passage de f_n à f_{n+1}, il suffit d'observer que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & M_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & M_{n+1} \\ I_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] & I_n \arrow[r] & I_{n+1} \end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) \arrow[r, "\eta_n"] \arrow[d] & M_{n+1} \\ & \mathrm{Coker}(d_{n-1}) \arrow[r] & I_{n+1} \end{tikzcd}$$

dont la première ligne est une suite exacte (car le complexe M_B est exact). Comme I_{n+1} est un objet injectif, il existe un morphisme $f_{n+1} : M_{n+1} \to I_{n+1}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & M_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ I_n \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_{n-1}) \arrow[r] & I_{n+1} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Montrons l'unicité de f à équivalence homotopique près. Soit

$$(g_n : M_n \to I_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

une autre famille de morphismes dans $\mathcal{A}$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\partial_{-1}"] \arrow[d, "f"] & M_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "g_0"] & M_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"] & \cdots \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & M_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_n"] & M_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & \cdots \\ \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "d_{-1}"'] & I_0 \arrow[r, "d_0"'] & I_1 \arrow[r, "d_1"'] & \cdots \arrow[r, "d_{n-1}"'] & I_n \arrow[r, "d_n"'] & I_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On construit des morphismes $s_n : M_n \to I_{n-1}$ (avec la convention $I_{-1} = A$) tels que $s_0 \partial_{-1} = 0$ et que

$$s_{n+1}\partial_n + d_{n-1}s_n = f_n - g_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par récurrence sur n en prenant $s_0 = 0$. Si $s_0, \ldots, s_n$ sont construits, on considère le morphisme

$$h_n := f_n - g_n - d_{n-1}s_n.$$

Si $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} h_n\partial_{n-1} &= (f_n - g_n)\partial_{n-1} - d_{n-1}s_n\partial_{n-1} = d_{n-1}(f_{n-1} - g_{n-1}) - d_{n-1}s_n\partial_{n-1}) \\ &= d_{n-1}(f_{n-1} - g_{n-1} - d_{n-1}s_n) = d_{n-1}d_{n-2}s_n = 0. \end{aligned}$$

L'égalité $h_n\partial_{n-1} = 0$ est aussi vraie lorsque $n = 0$. En effet, on a

$$h_0\partial_{-1} = (f_0 - g_0)\partial_{-1} = d_{-1}(f - f) = 0.$$

Donc il existe un unique morphisme $\widetilde{h}_n : \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) \to I_n$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "h_n"'] & \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) \arrow[dl, dotted, "\widetilde{h}_n"] \\ I_n & \end{tikzcd}$$

où $\pi_n : M_n \to \mathrm{Coker}(\partial_{n-1})$ est le morphisme canonique. Comme le complexe M_B est exact, le morphisme canonique $\eta_n : \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) \to M_{n+1}$ est un monomorphisme. Comme I_{n+1} est un objet injectif, il existe un morphisme $s_{n+1} : M_{n+1} \to I_n$ tel que $s_{n+1}\eta_n = \widetilde{h}_n$. On obtient donc

$$s_{n+1}\partial_n = s_{n+1}\eta_n\pi_n = \widetilde{h}_n\pi_n = h_n.$$

Ainsi par récurrence on construit une homotopie entre les deux relèvements de f. Le théorème est donc démontré. □

4.4.4. Corollaire. — *Supposons que I est un complexe de cochaînes dans $\mathbf{Com}^+_{\mathcal{A}}$ dont chaque terme est un object injectif. Si $f : I \to M$ est un quasi-isomorphisme, alors il admet une inverse à gauche dans la catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. — Comme f est un quasi-isomorphisme, on obtient que $\mathrm{cône}(f)$ est un complexe exact. En outre, le théorème montre que le morphisme canonique $\delta = (-1, 0) : \mathrm{cône}(f) \to I[-1]$ est homotopique au morphisme nul. Soit

$$s = (\alpha, \beta) : I[-1] \oplus M \longrightarrow (I, -d_I)$$

l'homotopie. On a

$$(-1, 0) = \delta = sd + ds = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & 0 \\ -f & d \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = -(\alpha d - \beta f, \beta d) - (d\alpha, d\beta).$$

Donc $\beta : M \to I$ est un morphisme de complexes, et

$$-\beta f + 1 = \alpha d + d\alpha.$$

Cela montre que $\beta f = 1$ dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$. □

4.4.5. Corollaire. — *Soit I un complexe de cochaînes dans $\mathbf{Com}^+_{\mathcal{A}}$ dont les termes sont injectifs. Pour tout complexe M on a une bijection canonique entre $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(M, I) \cong \mathbf{K}_{\mathcal{A}}(M, I)$.*

Démonstration. — Soit $f : M \to I$ un morphisme dans $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}$. Alors f correspond à un diagramme $I \xrightarrow{s} N \xleftarrow{g} M$, où s est un quasi-isomorphisme. Soit t un inverse à gauche de s dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$. Le morphisme $tg \in \mathbf{K}_{\mathcal{A}}(M, I)$ détermine la classe de f car $g = sf$ dans $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(M, I)$. □

4.4.6. Théorème. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne qui admet suffisamment d'objets injectifs. Alors on a une équivalence de catégorie entre $\mathbf{D}^+_{\mathcal{A}}$ et $\mathbf{K}^+_{\mathcal{I}}$, où $\mathbf{K}^+_{\mathcal{I}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$ des complexes consistant des objects injectifs.*

4.4.7. Lemme. — *Soit $\mathcal{A}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ contenant les objets nuls. Si, pour tout $X \in \mathcal{A}$, il existe $X_0 \in \mathcal{A}_0$ et un monomorphisme $X \to X_0$ dans $\mathcal{A}$, alors tout complexe de cochaînes bornés à gauches dans $\mathbf{Com}^+_{\mathcal{A}}$ est quasi-isomorphe à un complexe dont les termes sont dans $\mathcal{A}_0$.*

Démonstration. — Soit A un complexe de cochaînes dans $\mathbf{Com}^+_{\mathcal{A}}$. Supposons que l'on a construit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "d^A_{n-2}"] \arrow[d, "f_{n-2}"] & A_{n-1} \arrow[r, "d^A_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}\ ①"] & A_n \arrow[d, "f_n"] \\
\cdots \arrow[r] & I_{n-2} \arrow[r, "d^I_{n-2}"'] & I_{n-1} \arrow[r, "d^I_{n-1}"'] & I_n
\end{tikzcd}$$

dont la deuxième ligne est un morceau de complexe de cochaînes à objets dans $\mathcal{A}_0$, tel que $H^j(A) = H^j(I)$ pour tout $j < n$ et que le morphisme $g_n : \mathrm{Coker}(d^A_{n-1}) \to \mathrm{Coker}(d^I_{n-1})$ induit par le carré commutatif ① soit un monomorphisme.

Soit Z_{n+1} le coproduit cofibré du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} & \\
\mathrm{Coker}(d^A_{n-1}) \arrow[u, "\delta_n"] \arrow[r, "g_n"'] & \mathrm{Coker}(d^I_{n-1})
\end{tikzcd}$$

où $\delta_n : \mathrm{Coker}(d^A_{n-1}) \to A_{n+1}$ est induit par $d^A_n : A_n \to A_{n+1}$. On choisit un objet I_{n+1} dans $\mathcal{A}_0$ et un monomorphisme $\lambda_n : Z_{n+1} \to I_{n+1}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[r, "a_n"] & Z_{n+1} \arrow[r, "\lambda_n"] & I_{n+1} \\
\mathrm{Coker}(d^A_{n-1}) \arrow[u, "\delta_n"] \arrow[r, "g_n"'] \arrow[ur, phantom, "②"] & \mathrm{Coker}(d^I_{n-1}) \arrow[u, "b_n"'] & I_n \arrow[l, "\pi_n"']
\end{tikzcd}$$

où a_n, b_n et π_n sont des morphismes universels. Soit

$$d_n^I := \lambda_n b_n \pi_n \quad \text{et} \quad f_{n+1} := \lambda_n a_n.$$

Comme λ_n est un monomorphisme, on a $H^n(I) \cong \mathrm{Ker}(\lambda_n b_n) \cong \mathrm{Ker}(b_n)$. En outre, on a $H^n(A) \cong \mathrm{Ker}(\delta_n)$. Comme g_n est un monomorphisme, le carré ② est cartésien. On obtient donc que le morphisme canonique $H^n(A) \to H^n(I)$ est un isomorphisme.

Enfin, comme le carré ② est cocartésien, il induit un isomorphisme entre $\mathrm{Coker}(\delta_n)$ et $\mathrm{Coker}(b_n)$. Rappelons que l'on a des isomorphismes canonique

$$\mathrm{Coker}(\delta_n) \cong \mathrm{Coker}(d_n^A), \qquad \text{et } \mathrm{Coker}(\lambda_n b_n) \cong \mathrm{Coker}(d_n^I).$$

En outre, on a une suite exacte

$$\mathbf{0} = \mathrm{Ker}(\lambda_n) \longrightarrow \mathrm{Coker}(b_n) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\lambda_n b_n)\ .$$

On en déduit que le morphisme canonique $\mathrm{Coker}(d_n^A) \to \mathrm{Coker}(d_n^I)$ est un monomorphisme. □

Démonstration du théorème. — On a montré que tout complexe de cochaînes dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}^+$ est quasi-isomorphe à un complexe consistant des objets injectifs. Il reste à montrer que tout quasi-isomorphisme entre deux complexe de cochaînes dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}^+$ dont les termes sont injectif est un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{I}}^+$. Soit $s : I \to I'$ un tel quasi-isomorphisme. Il existe $t : I' \to I$ tel que $ts = 1_I$ dans $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}^+$. En outre, t est lui-même un quasi-isomorphisme, donc est inversible à gauche dans la catégorie $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}^+$. Il est donc inversible.

□

4.5. Foncteurs dérivés

4.5.1. Soit $(\mathbf{K}, T, \mathcal{E})$ et $(\mathbf{K}', T', \mathcal{E}')$ deux catégories triangulées. On appelle *foncteur triangulé* de $(\mathbf{K}', T', \mathcal{E}')$ dans $(\mathbf{K}, T, \mathcal{E})$ tout foncteur additif $F : \mathbf{K}' \to \mathbf{K}$ qui préserve les foncteurs de translation (i.e. on a $FT' = TF$) et qui transforme tout triangle distingué de $\mathbf{K}'$ en un triangle distingué de $\mathbf{K}$.

4.5.2. Soit $(\mathbf{K}, T, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée. On appelle *sous-catégorie triangulée* toute sous-catégorie pleine non-vide $\mathbf{K}'$ de $\mathbf{K}$ qui satisfait à la condition suivante : si

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

est un triangle distingué dans $\mathbf{K}$ et si deux objets parmi X, Y et Z appartiennent à $\mathbf{K}'$, alors le troisième objet appartient à $\mathbf{K}$ aussi.

4.5.3. Remarque. — Soit $\mathbf{K}'$ une sous-catégorie triangulée de $\boldsymbol{K}$. Comme $\mathbf{K}'$ contient au moins un objet Y et comme

$$Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow T(Y)$$

est un triangle distingué, on obtient que $\mathbf{K}'$ contient tout objet nul de $\mathbf{K}$. En outre, si X est un objet de $\mathbf{K}'$, alors il $T(X)$ et $T^{-1}(X)$ sont tous des objets de $\mathbf{K}'$ car les triangles

$$X \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow T(X) \xrightarrow{1_{T(X)}} T(X)$$

et

$$T^{-1}(X) \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X$$

sont distingués. En particulier, l'automorphisme $T : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ induit un automorphisme T' de $\mathbf{K}'$. Si on note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des triangles distingués de $\mathbf{K}$ dont les objets appartiennent à $\mathbf{K}'$, alors le triplet $(\mathbf{K}', T', \mathcal{E}')$ forme une catégorie triangulée et le foncteur d'inclusion $\mathbf{K}' \to \mathbf{K}$ est un foncteur triangulé.

4.5.4. Exemple. — Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégorie abélienne, $\mathbf{K}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ et $F : \mathbf{K} \to \mathbf{K}_{\mathcal{B}}$ un foncteur triangulé. Si le foncteur F préserve les quasi-isomorphismes, alors il induit par passage aux localisations un foncteur triangulé $\mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$, où $\mathbf{D}$ est la localisée de la catégorie $\mathbf{K}$ par le système multiplicatif de quasi-isomorphisme, appelée la catégorie dérivée de $\mathbf{K}$.

Soit $F_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additive. Alors F_0 induit naturellement un foncteur $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{Com}_{\mathcal{B}}$. En outre, comme F_0 préserve les équivalences homotopique, il induit par passage au quotient un foncteur $F : \mathbf{K}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{K}_{\mathcal{B}}$. Ce foncteur préserve les translations et les cônes, donc il est un foncteur triangulé. Si de plus F_0 est un foncteur exact, alors le foncteur F préserve les quasi-isomorphismes. Cependant, lorsque F_0 n'est pas un foncteur exact, en général le foncteur F ne préserve pas les quasi-isomorphismes.

Dans le cas où la catégorie $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs, la catégorie dérivé de $\mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$ (notée $\mathbf{D}^+_{\mathcal{A}}$) est équivalente à la catégorie $\mathbf{K}^+_{\mathcal{I}}$, qui est une catégorie sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$. Cette observation nous permet de construire, pour chaque foncteur triangulé $F : \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}} \to \mathbf{K}^+_{\mathcal{B}}$, un foncteur triangulé $RF : \mathbf{D}^+_{\mathcal{A}} \to \mathbf{D}^+_{\mathcal{B}}$ comme la composée des foncteurs

$$\mathbf{D}^+_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\phi} \mathbf{K}^+_{\mathcal{I}} \xrightarrow{i} \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}} \xrightarrow{F} \mathbf{K}^+_{\mathcal{B}} \xrightarrow{q} \mathbf{D}^+_{\mathcal{B}} \ ,$$

où ϕ est l'équivalence de catégorie prédite dans le théorème 4.4.6 et i est le foncteur d'inclusion. Le foncteur RF est bien défini à un unique isomorphisme de foncteurs près.

Pour tout complexe A dans $\mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$, on a des bijection naturelle

$$\mathbf{D}^+_{\mathcal{A}}(q(A), q(A)) \cong \mathbf{D}^+_{\mathcal{A}}(q(A), qi\phi q(A)) \cong \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}(A, i\phi q(A))$$

où la première bijection provient de l'isomorphisme de foncteurs entre $qi\phi : \mathbf{D}^+_{\mathcal{A}} \to \mathbf{D}^+_{\mathcal{A}}$ et le foncteur d'identité, et la deuxième bijection provient du corollaire **??**). On désigne par $\widetilde{\xi}_A : A \to i\phi q(A)$ le morphisme correspondant au morphisme d'identité de $q(A)$ par ces bijections. Par définition,

$$qF(\widetilde{\xi}_A) : q(A) \longrightarrow qi\phi q(A)$$

est un isomorphisme. Soit en outre ξ_A le morphisme $qF(\widetilde{\xi}_A) : qF(A) \to RF(q(A))$. Il s'avère que $\xi = (\xi_A)_{A \in \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}}$ définit un morphisme de foncteurs de qF vers $(RF)q$.

4.5.5. Théorème d'existence. — *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}} \to \mathbf{K}^+_{\mathcal{B}}$ un foncteur triangulé. Le morphisme de foncteurs $\xi : qF \to (RF)q$ construit plus haut vérifie la propriété universelle suivante. Si $G : \mathbf{D}^+_{\mathcal{A}} \to \mathbf{D}^+_{\mathcal{B}}$ est foncteur triangulé et $\zeta : qF \to Gq$ est un morphisme de foncteurs (de $\mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$ vers $\mathbf{D}^+_{\mathcal{B}}$), alors il existe un unique morphisme de foncteurs $\eta : RF \to G$ tel que $\zeta_A = \eta_{q(A)}\xi_A$ pour tout $A \in \mathbf{K}^+_{\mathcal{A}}$.*

4.5.6. Définition. — Soit $F : \mathbf{K} \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ un foncteur triangulé. Un foncteur dérivé à droite de F est défini comme la donnée d'un foncteur triangulé $RF : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ et un morphisme de foncteurs ξ de $qF : \mathbf{K} \to \mathbf{K}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{q} \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ dans $(RF)q : \mathbf{K} \xrightarrow{q} \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ tel que, si $G : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ est un autre foncteur triangulé muni d'un morphisme de foncteur $\zeta : qF \to Gq$, alors il existe un unique morphisme de foncteurs $\eta : RF \to G$ tel que $\zeta_A = \eta_{q(A)}\xi_A$ pour tout $A \in \mathbf{K}$.

4.5.7. Définition. — Soit $F : \mathbf{K} \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ un foncteur triangulé. Un foncteur dérivé à gauche de F est défini comme la donnée d'un foncteur triangulé $LF : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ et un morphisme de foncteurs ξ de $(LF)q : \mathbf{K} \xrightarrow{q} \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ dans $qF : \mathbf{K} \to \mathbf{K}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{q} \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ tel que, si $G : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ est un autre foncteur triangulé muni d'un morphisme de foncteur $\zeta : Gq \to qF$, alors il existe un unique morphisme de foncteurs $\eta : G \to LF$ tel que $\zeta_A = \xi_A\eta_{q(A)} : G(q(A)) \to LF(q(A)) \to q(F(A))$ pour tout $A \in \mathbf{K}$.

4.5.8. Remarque. — Si le foncteur dérivé existe, alors il est unique à un unique isomorphisme près. On utilise les expressions R^+, R^- et R^b lorsqu'il y a des ambiguïtés.

4.5.9. Soit A un complexe dans $\mathbf{K}$. On dit que A est F-acyclique si $F(A)$ est un complexe exact.

4.5.10. Théorème d'existence généralisé. — Soit $\mathbf{K}_0$ une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{K}$ telle que

(1) tout complexe A de $\mathbf{K}$ admet un quasi-isomorphisme vers un complexe A'_0 dans $\mathbf{K}_0$,

(2) tout complexe exact dans $\mathbf{K}_0$ est F-acyclique.

Alors les catégories dérivées $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}_0$ sont équivalentes, et $RF : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_0 \overset{R_0F}{\to} \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ est un foncteur dérivé à droite de F.

4.5.11. Remarque. — Si $f : A \to B$ est un quasi-isomorphisme, alors son cône est exacte. Donc $F(f) : F(A) \to F(B)$ est aussi un quasi-isomorphisme. Par conséquent, F induit un foncteur entre les catégorie dérivées $\mathbf{D}_0 \to \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$, qui est le foncteur dérivé de F (par rapport à $\mathbf{K}_0$).