Chapitre V

Schémas

Dans ce chapitre, on fixe deux univers $\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{U}$ tels que $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{U}$. On désigne par $\mathbf{M}$ la catégorie des anneaux commutatifs et unifères dont les ensembles sous-jacents appartiennent à $\mathfrak{U}_0$. Tout objet $\mathbf{M}$ est un modèle dans l'univer $\mathfrak{U}_0$ de la théorie du premier ordre des anneaux commutatifs et unifères. Vu comme une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\mathbf{M}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{An}$ des anneaux commutatifs et unifères dont les ensembles sous-jacents appartiennent à $\mathfrak{U}$. On l'appelle *catégorie des modèles*. C'est une $\mathfrak{U}$-catégorie petite. Comme dans les chapitres précédents, on désigne par $\mathbf{Ens}$ la catégorie des ensembles dans $\mathfrak{U}$ et par $\mathbf{Ela}$ la $\mathfrak{U}$-catégorie des espaces localement annelés.

À tout espace localement annelé X on associe un foncteur $\mathfrak{S}_X$ de la catégorie des modèles $\mathbf{M}$ dans la catégorie des ensembles $\mathbf{Ens}$ qui envoie tout modèle A sur l'ensemble $\mathbf{Ela}(\operatorname{Spec} A, X)$ des points de X à valeurs dans A. Cette correspondance définit en fait un foncteur de $\mathbf{Ela}$ dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$. Ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$\mathrm{Rg} : \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens}) \longrightarrow \mathbf{Ela}$$

qui associe à chaque foncteur représentable le spectre de l'anneau qui représente le foncteur. Le foncteur Rg est appelé foncteur de *réalisation géométrique*. La réalisation géométrique d'un foncteur représentable est appelé un *schéma affine*. Il s'avère que Rg définit un équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ des foncteurs représentables (qui est équivalente à la catégorie opposée $\mathbf{M}^\circ$ via le lemme de Yoneda) et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ela}$ des schémas affines. Comme tout foncteur $\mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ est une limite inductive de foncteurs représentables, on obtient que la réalisation géométrique d'un foncteur est une limite inductive de schémas affines.

Sur la catégorie opposée des modèles $\mathbf{M}^\circ$ on associe une topologie de Grothendieck, appelé *topologie de Zariski-Grothendieck*. Il s'avère que tout foncteur associé à un espace localement annelé est un faisceau sur $\mathbf{M}^\circ$. On appelle *schéma* la réalisation géométrique de tout faisceau d'ensembles sur la catégorie $\mathbf{M}^\circ$ (munie de la topologie de Zariski-Grothendieck) qui est localement représentable. Localement un schéma est isomorphe à un schéma affine. Une fois encore, la réalisation géométrique définit une équivalence de catégorie entre la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ des faisceaux localement représentable et la catégorie **Sch** des schémas, sous-catégorie pleine de **Ela** des schémas.

Du point de vue de la théorie des ensembles, la construction résumée plus haut est légèrement différente des ouvrages d'enseignement classiques comme par exemple [2, 3], mais suit de près l'approche de [1] : on autorise le recollement de schémas affines éventuellement paramétrés par un ensemble dans l'univers $\mathfrak{U}$ qui est plus grand que l'univers $\mathfrak{U}_0$ où on considère les modèles de la théorie du premier ordre des anneaux commutatifs et unifères. Ce changement d'univers est important dans la réalisation géométrique des foncteurs généraux sur la catégorie des modèles. Il faut cependant être conscient que une telle théorie de schéma repose sur un choix d'univers $\mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{U}$. En particulier, pour un anneau dans **An** dont l'ensemble sous-jacent n'appartient pas à l'univers $\mathfrak{U}_0$ ne doit pas être considéré comme un schéma affine.

Malgré le choix non-intrinsèque de deux univers, le point de vue fonctoriel a beaucoup d'avantages. D'une part la catégorie des schémas est équivalente à une catégorie de foncteurs. En particulier, pour définir un morphisme de schéma, il suffit de préciser le morphisme de foncteurs correspondants ; de l'autre part, des propriétés de morphismes de schémas se généralisent naturellement dans le cadre de la catégorie des foncteurs et sont plus faciles à comprendre dans ce cadre-là.

1. Spectre premier d'un anneau

Dans ce paragraphe, tout anneau est supposé être commutatif et unifère, dont l'ensemble sous-jacent appartient à l'univers $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire un objet de la catégorie **An**.

1.1. Spectre premier

Soit A un anneau. On dit que d'un idéal $\mathfrak{p}$ de A est *premier* si l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est *intègre* (i.e. les élément unité et élément nul sont différents, et le produit de deux éléments non-nuls reste encore non-nul). On désigne par $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A, appelé le *spectre premier* de A.

On convient que, dans un anneau intègre, l'élément nul et l'élément unité ne sont pas égaux. Par conséquent, quand on parle d'un idéal premier, on exclut l'idéal qui s'identifie à l'anneau lui-même. En particulier, si A est l'anneau nul (i.e. les éléments unité et nul de A sont identiques), alors le spectre de A est l'ensemble vide.

Par définition, un idéal $\mathfrak{p}$ de A est premier si et seulement si l'ensemble $A \setminus \mathfrak{p}$ est une *famille multiplicative* de A, autrement dit, $A \setminus \mathfrak{p}$ contient l'élément unité et est stable par multiplication.

On appelle *idéal maximal* de A tout idéal $\mathfrak{m}$ de A tel que l'anneau quotient $A/\mathfrak{m}$ soit un corps. On convient que les élément unité et élément nul dans un corps sont différents. Ainsi tout corps est un anneau intègre. En particulier, tout idéal maximal de A est un idéal premier. On désigne par $\mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A appelé *spectre maximal* de A. C'est un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(A)$.

1.2. Fonctorialité du spectre premier

Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal de B, alors $f^{-1}(\mathfrak{q})$ est le noyau de l'homomorphisme d'anneaux composé

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{q} \ .$$

Ainsi f induit par passage au quotient un homomorphisme injectif d'anneaux de $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ dans $B/\mathfrak{q}$. En particulier, si $B/\mathfrak{q}$ est un anneau intègre, alors il en est de même de $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$. Cela montre que $\mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$ définit une application de $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ que l'on note ${}^{r}f$ (la *réciproque* de f).

Les propriétés élémentaires de la correspondance réciproque montre que,

(1) si f est le morphisme d'identité d'un anneau A, alors ${}^{r}f$ est l'application d'identité de $\mathrm{Spec}(A)$ dans lui même,

(2) si f et g sont deux morphismes d'anneaux composables, alors on a ${}^{r}(g \circ f) = {}^{r}f \circ {}^{r}g$.

Ainsi le procédé d'associer à un anneau A son spectre $\mathrm{Spec}(A)$ et à un morphisme d'anneaux f l'application ${}^{r}f$ définit un foncteur de la catégorie opposée des anneaux $\mathbf{An}^{\circ}$ dans la catégorie des ensembles.

1.3. Proposition. *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux qui est surjectif, alors l'application ${}^{r}f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est injective.*

Démonstration. Comme f est une application surjective, si $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ sont deux idéaux distincts (ou plus généralement deux sous-ensembles distincts) de B, alors on a $f^{-1}(\mathfrak{q}_1) \neq f^{-1}(\mathfrak{q}_2)$. □

1.4. Topologie de Zariski

Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. On désigne par $V(\mathfrak{a})$ l'image de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ par l'application injective ${}^r\pi$ (voir la proposition VI-1.3 pour l'injectivité), où $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ est l'homomorphisme de projection. En d'autres termes, un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est dans $V(\mathfrak{a})$ si et seulement si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Par définition, $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A)$ et $V(A) = \varnothing$.

1.5. Proposition. *Soit A un anneau.*

(1) Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors on a $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$

(2) Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A, alors $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, où $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est l'idéal de A engendré par $\{xy \,|\, x \in \mathfrak{a},\, y \in \mathfrak{b}\}$.

(3) Si $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ est une famille d'idéaux de A et si $\mathfrak{a}$ est la somme des $\mathfrak{a}_i$ (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux contenant $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$), alors on a $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

(4) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Si $\mathfrak{a} \neq A$, alors il existe au moins un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$. En particulier, l'ensemble $V(\mathfrak{a})$ est vide si et seulement si $\mathfrak{a} = A$.

Démonstration. (1) Comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, tout idéal premier de A contenant $\mathfrak{b}$ contient nécessairement $\mathfrak{a}$.

(2) D'après (1), on a

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \supset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}).$$

Il suffit donc de vérifier $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. S'il ne contient ni $\mathfrak{a}$ ni $\mathfrak{b}$, alors il existe deux éléments x et y de A qui sont dans $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ respectivement. On a alors $xy \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Cependant, comme $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on a $xy \notin \mathfrak{p}$. Cela est absurde car $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.

(3) Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contient $\mathfrak{a}$ si et seulement s'il contient tous les idéaux $\mathfrak{a}_i$.

(4) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, $\mathfrak{a} \neq A$. Soit Θ l'ensemble des idéaux $\mathfrak{b}$ de A tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subsetneq A$. L'ensemble Θ est non-vide et est ordonné par la relation d'inclusion. Tout sous-ensemble totalement ordonné Θ_0 de Θ au moins un majorant, comme par exemple la réunion de tous les idéaux dans Θ_0 lorsque Θ_0 est non-vide. Par le lemme de Zorn, l'ensemble ordonné Θ admet au moins un élément maximal $\mathfrak{m}$. L'anneau quotient $A/\mathfrak{m}$ est non-nul car $\mathfrak{m}$ est strictement contenu dans A. Montrons qu'il est en fait un corps. Supposons par absurde que $A/\mathfrak{m}$ n'est pas un corps, il existe alors un élément non-nul $x \in A/\mathfrak{m}$ qui n'est pas inversible. L'idéal principal I de $A/\mathfrak{m}$ engendré par x est donc différent de $A/\mathfrak{m}$. L'image réciproque de I dans A est un élément de Θ qui contient strictement $\mathfrak{m}$. Cela contredit la maximalité de $\mathfrak{m}$. □

1.6. Remarque. Dans la proposition précédente, il apparaît la somme d'une famille d'idéaux. Plus généralement, si A est un anneau, M est un A-module et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de sous-A-module de M, la somme des M_i est définie comme l'intersection de tous les sous-A-modules de M contenant $\bigcup_{i\in I} M_i$, noté $\sum_{i\in I} M_i$. Tout élément de $\sum_{i\in I} M_i$ s'écrit comme $\sum_{i\in I_0} x_i$, où I_0 est un sous-ensemble fini de I, et $x_i \in M_i$ pour tout $i \in I_0$. En particulier, si $\sum_{i\in I} M_i$ est un A-module de type fini, alors il existe un sous-ensemble fini I' de I tel que

$$\sum_{i\in I} M_i = \sum_{i\in I'} M_i.$$

1.7. Définition. La proposition VI-1.5 et les relations $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A)$ et $V(A) = \varnothing$ montrent que la famille des $D(\mathfrak{a}) := V(\mathfrak{a})^c$ où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux de A forment une topologie sur l'ensemble $\mathrm{Spec}\, A$. On l'appelle *topologie de Zariski* sur $\mathrm{Spec}(A)$.

Si $\mathfrak{a} = As$ est un idéal principal de A, on utilise l'expression $D(s)$ pour désigner l'ouvert $D(\mathfrak{a})$ de $\mathrm{Spec}(A)$. Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A appartient à $D(s)$ si et seulement si $f \notin \mathfrak{p}$. Les ensembles de la forme $D(s)$, $s \in A$ forment une base de topologie de $\mathrm{Spec}(A)$. En effet, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, par la proposition VI-1.5 on obtient que $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(As)$ et donc $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(s)$.

1.8. Remarque. Soient A un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. L'adhérence de $\{\mathfrak{p}\}$ dans $\mathrm{Spec}\, A$ pour la topologie de Zariski est $V(\mathfrak{p})$. En effet, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier contenant $\mathfrak{p}$, pour tout sous-ensemble ouvert $D(s)$ ($s \in A$) tel que $\mathfrak{q} \in D(s)$, on a $s \notin \mathfrak{q}$ et donc $s \notin \mathfrak{p}$, qui revient à $\mathfrak{p} \in D(s)$. En particulier, $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A si et seulement si $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$, ou de façon équivalente, $\mathfrak{p}$ est un point fermé dans $\mathrm{Spec}\, A$.

1.9. Proposition. *Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. L'application ${}^{r}f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est continue par rapport aux topologies de Zariski sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *et* $\mathrm{Spec}(B)$ *respectivement.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. On a $({}^{r}f)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(f(\mathfrak{a})B)$ car un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B contient $f(\mathfrak{a})B$ si et seulement si ${}^{r}f(\mathfrak{q}) \supset \mathfrak{a}$. Ainsi l'application ${}^{r}f$ préserve les ensembles fermés et donc est continue. □

1.10. Proposition. *Soit A un anneau.*

(1) Pour tout élément $s \in A$ et tout entier n, $n \geqslant 1$, on a $D(s) = D(s^n)$.

(2) Soit $(s_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A. L'ensemble $\mathrm{Spec}\, A$ *est recouvert par les $D(s_i)$, $i \in I$ si et seulement si A est engendré comme idéal de A par les s_i.*

(3) L'espace topologique $\operatorname{Spec} A$ *est quasi-compact (tout recouvrement ouvert de* $\operatorname{Spec} A$ *admet un sous-recouvrement fini).*

Démonstration. (1) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Comme l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est intègre, l'image canonique de s dans $A/\mathfrak{p}$ est non-nul si et seulement si l'image canonique de s^n est non-nul. On obtient donc que $s \notin \mathfrak{p}$ si et seulement si $s^n \notin \mathfrak{p}$.

(2) Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A engendré par $(s_i)_{i\in I}$. D'après la proposition VI-1.5 (3), le complémentaire de $\bigcup_{i\in I} D(s_i)$ est $V(\mathfrak{a})$, qui est l'ensemble vide. D'après la proposition VI-1.5 (4), on obtient $\mathfrak{a} = A$.

(3) Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\operatorname{Spec} A$ par des ouverts. Pour tout $i \in I$, soit $\mathfrak{a}_i$ un idéal de A tel que $U_i = D(\mathfrak{a}_i)$. Soit $\mathfrak{a}$ la somme des $\mathfrak{a}_i$. D'après la proposition VI-1.5 (3) et (4), on a

$$\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) = D(\mathfrak{a})$$

et donc $\mathfrak{a} = A$. Il existe alors un sous-ensemble fini I_0 de I tel que (cf. la remarque VI-1.6)

$$\sum_{i\in I_0} \mathfrak{a}_i = A.$$

Cela montre que $\operatorname{Spec}(A)$ est recouvert par $(U_i)_{i\in I_0}$. □

1.11. Localisation

Soient A un anneau et S une partie de A. On dit que S est une *famille multiplicative* de A si $1 \in S$ et si S est stable par la multiplication. On voit aussitôt que, si s est un élément de A, alors $\{s^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, s, s^2, \ldots\}$ est une famille multiplicative de A. En outre, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors $A \setminus \mathfrak{p}$ est une famille multiplicative de A.

Étant donnés un anneau A et une famille multiplicative S de A, on peut considérer S comme une catégorie petite dont l'ensemble des objets est S. Si s et t sont deux élément de S, l'ensemble $\operatorname{Hom}_S(s,t)$ consiste des éléments $u \in S$ tels que $t = su$. La composition des flèches provient de la loi de multiplication de l'anneau A : si r, s et t sont trois éléments de S et u, v sont deux éléments de S tels que $s = ru$ et $t = sv$, alors la loi de composition

$$\operatorname{Hom}_S(r,s) \times \operatorname{Hom}_S(s,t) \to \operatorname{Hom}_S(r,t)$$

envoie (u,v) sur uv. Si (r,s) est un couple d'éléments de S, alors $r \xrightarrow{s} rs$ et $s \xrightarrow{r} rs$ sont des morphismes vers rs. En outre, si

$$r \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} s$$

sont deux morphismes de mêmes source et but, alors $s \xrightarrow{r} rs$ est un morphisme tel que $ru = rv$ dans la catégorie S. Cela montre que la catégorie S est *filtrante*. Si M est un A-module, on définit un foncteur $F_{S,M}$ de la catégorie S dans celle des A-modules qui envoie tout élément de S sur M et envoie tout morphisme $r \xrightarrow{u} s$ en l'homothétie $u : M \to M$. Le procédé d'associer à tout A-module M le foncteur $F_{S,M}$ définit un foncteur de la catégorie A-**Mod** des A-modules dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(S, A\text{-}\mathbf{Mod})$.

Soient A un anneau, S une famille multiplicative de A et M un A-module. On désigne par $S^{-1}M$ ou $M[S^{-1}]$ la limite inductive du foncteur $F_{S,M}$, appelée *localisation* de M par rapport à S. On appelle *morphisme canonique* de M dans $S^{-1}M$ le morphisme universel de $M = F_{S,M}(1)$ dans $\varinjlim F_{S,M}$. Si S est de la forme $\{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, où s est un élément de A (avec la convention $f^0 = 1$), le module $S^{-1}M$ est noté aussi M_f ou $M[s^{-1}]$, appelé *localisation de M par rapport à s*.

Le procédé d'associer à tout A-module M sa localisation $S^{-1}M$ définit un foncteur additif de la catégorie des A-modules dans lui-même.

1.12. Proposition. *Soient A un anneau et S une famille multiplicative de A. Le foncteur $S^{-1} : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ préserve les limites inductives et les limites projectives finies. Il est donc un foncteur exact.*

Démonstration. On désigne par F_S le foncteur de A-**Mod** dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(S, A\text{-}\mathbf{Mod})$ qui envoie chaque A-module M sur le foncteur $F_{S,M}$. Le foncteur S^{-1} s'écrit donc comme le foncteur composé $\varinjlim \circ F_S$. Le foncteur F_S duplique les modules et morphismes, donc préserve les limites inductives et projectives. Enfin, comme S est une catégorie filtrante, le foncteur $\varinjlim : \mathbf{Fon}(S, A\text{-}\mathbf{Mod})$ préserve les limites inductives et les limites projectives finies. Le résultat est donc démontré. □

1.13. Proposition. *Soient A un anneau, S une famille multiplicative de A et M et N deux A-modules. Alors $S^{-1}M \otimes_A N$ est naturellement isomorphe à $S^{-1}(M \otimes_A N)$.*

Démonstration. Le foncteur $\otimes_A N$ de A-**Mod** dans lui-même admet un adjoint à droite (cf. l'exemple **??**.(b)), donc préserve les limites inductives. En particulier, il préserve les localisations. □

1.14. Construction explicite de la localisation

Il est utile de préciser explicitement la construction de la localisation. Soient A un anneau, S une famille multiplicative de A et M un A-module. Le module $S^{-1}M$ s'écrit comme l'ensemble des couples $(x, s) \in M \times S$, écris

formellement sous forme de x/s ou $\frac{x}{s}$, modulo la relation d'équivalence suivante :

$$\frac{x}{s} \sim \frac{y}{t} \Longleftrightarrow \exists\, u \in S,\ u(tx - sy) = 0. \tag{V.1}$$

Par abus de notation, on utilise encore l'expression x/s pour désigner sa classe d'équivalence dans l'espace quotient $S^{-1}M$. Les lois d'addition et de multiplication par un scalaire sont définies de façon naturelle :

$$\forall\, s,t \in S,\ x,y \in M, \quad \frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{tx+sy}{st},$$
$$\forall\, a \in A,\ s \in S,\ x \in M \quad a \cdot \frac{x}{s} = \frac{ax}{s}.$$

L'homomorphisme canonique de M dans $S^{-1}M$ envoie $x \in M$ sur la classe de $x/1$. On voit aussitôt que $S^{-1}M$ réduit au module nul dès que S contient un annihilateur de M (i.e. un élément $a \in A$ tel que $ax = 0$ pour tout $x \in M$).

1.15. Remarque. Le A-module $S^{-1}A$ admet une structure d'anneau commutatif, dont la loi de multiplication est

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}, \quad a,b \in A,\ s,t \in S.$$

En outre, le morphisme canonique de A vers $S^{-1}A$ est en fait un morphisme d'anneaux. D'après la proposition VI-1.13, on obtient $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$ pour tout A-module M et donc $S^{-1}M$ est naturellement muni d'une structure de $S^{-1}A$-module. La correspondance $S^{-1} : M \mapsto S^{-1}M$ définit en fait un foncteur de la catégorie des A-modules dans celles des $S^{-1}A$-modules. Ce foncteur préserve les limites inductives et les limites projectives finies, et donc est un foncteur exact.

Dans le cas particulier où l'anneau A est intègre et S ne contient pas l'élément nul, la relation d'équivalence définissant la localisation $S^{-1}A$ se simplifie comme

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \Longleftrightarrow tb - sa = 0. \tag{V.2}$$

On est donc dans une situation similaire à la construction des nombres rationnels à partir de l'anneau des entiers naturels. En particulier, si S est une famille multiplicative de A qui ne contient pas 0, alors $S^{-1}A$ est aussi un anneau intègre. Si $S = A \setminus \{0\}$, alors $S^{-1}A$ est un corps.

La localisation d'un anneau est en fait caractérisée par une propriété universelle.

1.16. Proposition. *Soient A un anneau et S une famille multiplicative dans A. Pour tout élément s de S, l'image canonique de s dans $S^{-1}A$ est inversible. Si B est un anneau et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau tel*

que, pour tout $s \in S$, $f(s)$ soit inversible dans B, alors le morphisme f se factorise de façon unique par $S^{-1}A$. En d'autres termes, le foncteur $\mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$*, qui envoie tout anneau B sur l'ensemble des morphismes d'anneaux $f : A \to B$ tels que $f(s)$ soit inversible pour tout $s \in S$, est représenté par $S^{-1}A$.*

Démonstration. Pour le premier énoncé il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = 1$$

dans $S^{-1}A$. Montrons le deuxième énoncé. Soit $\varphi : A \to S^{-1}A$ le morphisme canonique. S'il existe un morphisme d'anneaux $g : S^{-1}A \to B$ tel que $g\varphi = f$, alors g est unique car pour tout $a/s \in S^{-1}A$ on a

$$f(a) = g\Big(\frac{a}{1}\Big) = g\Big(\frac{a}{s}\Big)g\Big(\frac{s}{1}\Big) = g\Big(\frac{a}{s}\Big)f(s)$$

et donc $g(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Il reste à vérifier que l'application $g : S^{-1}A \to B$ envoyant a/s sur $f(a)f(s)^{-1}$ est bien définie et donne un morphisme d'anneaux tel que $f = g\varphi$. Si a et b sont deux éléments de A et si s et t sont deux éléments de S tels que $a/s = b/t$ dans $S^{-1}A$, alors il existe $u \in S$ tel que $u(sb - ta) = 0$. On en déduit

$$f(u)f(s)f(b) - f(u)f(t)f(a) = 0$$

et donc

$$f(a)f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}.$$

L'application g est donc bien définie. Par définition on a $f = g\varphi$. En outre, comme f est un morphisme d'anneaux, un calcul direct montre que g l'est aussi.

Enfin, le premier énoncé montre que, pour tout $g \in \mathbf{An}(S^{-1}A, B)$, le morphisme $g\varphi$ envoie tout élément $s \in S$ sur un élément inversible de B. Ainsi $g \mapsto \varphi g$ définit une bijection entre $\mathbf{An}(S^{-1}A, B)$ et l'ensemble des morphismes d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f(s) \in B^\times$ pour tout $s \in S$. Le dernier énoncé est donc démontré. □

1.17. Corollaire. *Soient A un anneau, S_1 et S_2 deux familles multiplicatives dans A et $S = \{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}$. Alors S est une famille multiplicative dans A, et $S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ est canoniquement isomorphe à $S^{-1}A$.*

Démonstration. La première assertion résulte directement de la définition de famille multiplicative. De plus, S est en fait la plus petite famille multiplicative contenant $S_1 \cup S_2$.

Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $f(s)$ soit inversible pour tout $s \in S$. Comme $S \supset S_1 \cup S_2$, d'après la proposition VI-1.16, pour $i \in \{1, 2\}$, il existe un unique morphisme d'anneaux $g_i : S_i^{-1}A \to B$ tel que $f = g_i\varphi_i$, où $\varphi_i : A \to S_i^{-1}A$ est le morphisme canonique. Comme $S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ est le coproduit cofibré de φ_1 et φ_2 dans la catégorie des anneaux, on obtient qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $g : S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A \to B$ tel que $f = g\varphi$, où $\varphi : A \to S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ est le morphisme canonique. Enfin, si s_1 et s_2 sont des éléments de S_1 et S_2 respectivement, alors $\varphi(s_1 s_2) = s_1 \otimes s_2 \in S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ est inversible et son inverse est $(1/s_1) \otimes (1/s_2)$. Ainsi $S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ représente le foncteur associé à $S^{-1}A$ (d'après la proposition VI-1.16). On obtient donc que $S_1^{-1}A \otimes_A S_2^{-1}A$ est canoniquement isomorphe à $S^{-1}A$. □

1.18. Lemme. *Soient A un anneau et S une famille multiplicative de A. Si I est un idéal de $S^{-1}A$ et si $\mathfrak{a}$ est l'image réciproque de I par le morphisme d'anneaux canonique $\varphi : A \to S^{-1}A$, alors $I = S^{-1}\mathfrak{a}$, et l'anneau quotient $(S^{-1}A)/I$ est isomorphe à $\overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{a})$, où $\overline{S}$ désigne l'image canonique de S dans $A/\mathfrak{a}$.*

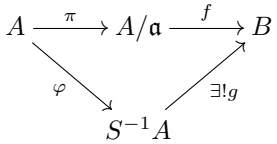
Démonstration. Comme le foncteur S^{-1} exact, on obtient que $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal de $S^{-1}A$. On a nécessairement $S^{-1}\mathfrak{a} \subset I$ car par définition

$$\mathfrak{a} = \{a \in A \,|\, a/1 \in I\}.$$

Réciproquement, si a/s est un élément de I, alors on a $a \in \mathfrak{a}$ puisque $a/1 = (a/s) \cdot (s/1) \in I$. On obtient donc $a/s \in S^{-1}\mathfrak{a}$, d'où $I \subset S^{-1}\mathfrak{a}$.

On désigne par $p : S^{-1}A \to (S^{-1}A)/I$ le morphisme de projection. Pour tout $a \in \mathfrak{a}$ on a $p\varphi(a) = 0$. Donc $p\varphi$ se factorise de façon unique par $A/\mathfrak{a}$. En outre, si s est un élément de S et si $\overline{s} = p(s)$, alors l'image canonique de $\overline{s}$ dans $(S^{-1}A)/I$ est inversible car $s/1$ est inversible dans $S^{-1}A$.

Si $f : A/\mathfrak{a} \to B$ est un morphisme d'anneaux tel que $f(\overline{s})$ pour tout $s \in S$, où $\overline{s}$ désigne l'image canonique de s dans $A/\mathfrak{a}$, alors le morphisme d'anneaux composé $A \to A/\mathfrak{a} \to B$ se factorise de façon unique par $S^{-1}A$ (cf. la proposition VI-1.16) : on a un diagramme commutatif



où π est le morphisme de projection. Pour tout élément a/s de I, on a $g(a/s) = f(\pi(s))^{-1}f(\pi(a)) = 0$ car $a \in \mathfrak{a}$. Donc g se factorise de façon unique par $(S^{-1}A)/I$. On obtient que $(S^{-1}A)/I$ représente le foncteur qui définit $\overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{a})$ et donc on a $(S^{-1}A)/I \cong \overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{a})$. □

1.19. Théorème. *Soient A un anneau et S une famille multiplicative de A. On désigne par $f : A \to S^{-1}A$ le morphisme d'anneaux canonique. Alors l'application continue ${}^{r}f : \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}(A)$ est injective et définit un homéomorphisme entre $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ et son image dans $\mathrm{Spec}(A)$, qui s'identifie à l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ qui ne rencontrent pas S.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. D'après le lemme VI-1.12, on a

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}),$$

où $\overline{S}$ désigne l'image canonique de S dans $A/\mathfrak{p}$. Comme $\overline{S}$ contient l'élément nul si et seulement si $S \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$. Par la remarque VI-1.15, on obtient que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $S^{-1}A$ lorsque $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$. Dans le cas contraire, on a $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$.

On désigne par $\Sigma(S)$ la partie de $\mathrm{Spec}(A)$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ vérifiant la condition $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$. Le raisonnement au-dessus montre que $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ définit une application de $\Sigma(S)$ vers $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ que l'on note comme φ. D'après le lemme VI-1.18, l'application composée $\varphi \circ {}^{r}f$ est l'application d'identité de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, $f^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$ est l'idéal de A qui consisite des éléments $a \in A$ tels que $a/1 \in S^{-1}A$ puisse s'écrire sous la forme b/s avec $b \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$. Cette condition implique que $a \in \mathfrak{p}$ si $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$. Cela montre que ${}^{r}f(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ lorsque $\mathfrak{p} \in \Sigma(S)$. L'application composée ${}^{r}f \circ \varphi$ est donc l'application d'identité de $\Sigma(S)$. Ainsi ${}^{r}f$ définit une bijection de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ vers son image, qui s'identifie à $\Sigma(S)$.

Pour montrer que ${}^{r}f$ définit un homeomorphisme de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ vers $\Sigma(S)$ (muni de la topologie induite), il suffit de vérifier que ${}^{r}f$ est une application fermée. Pour cela on considère un idéal I de $S^{-1}A$. D'après le lemme VI-1.18, on obtient que $I = S^{-1}\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a} = f^{-1}(I)$. Un idéal premier $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ contient I si et seulement si ${}^{r}f(\mathfrak{P}) \supset \mathfrak{a}$. En effet, si $\mathfrak{P} \supset I$, alors on a ${}^{r}f(\mathfrak{P}) = f^{-1}(\mathfrak{P}) \supset f^{-1}(I) = \mathfrak{a}$. Réciproquement, si ${}^{r}f(\mathfrak{P}) \supset \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{P} = S^{-1}({}^{r}f(\mathfrak{P})) \supset S^{-1}(\mathfrak{a}) = I$. On obtient donc ${}^{r}f(V(I)) = V(\mathfrak{a}) \cap \Sigma(S)$. Le résultat est ainsi démontré. □

1.20. Corollaire. *Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau A et si S est la famille multiplicative $A \setminus \{\mathfrak{p}\}$, alors $S^{-1}A$ est un anneau local.*

Démonstration. D'après le théorème VI-1.19, l'espace $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ est homéomorphe au sous-ensemble $\Sigma(S)$ de $\mathrm{Spec}\, A$ des idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{p}$. Donc $S^{-1}\mathfrak{p}$ est le seul point fermé de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ (cf. §VI-1.8), d'où $S^{-1}A$ admet un unique idéal maximal. □

1.21. Remarque. Soient A un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On désigne par $A_{\mathfrak{p}}$ la localisation de A par rapport à la famille multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$. La démonstration du théorème VI-1.19 montre que l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ est égal à $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

1.22. Proposition. *Soient A et B deux anneaux. L'espace topologique* $\mathrm{Spec}(A \times B)$ *est homéomorphe à la réunion disjointe de* $\mathrm{Spec}(A)$ *et* $\mathrm{Spec}(B)$.

Démonstration. On identifie $\mathrm{Spec}\, A$ à un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Spec}(A \times B)$ via la projection canonique $A \times B \to A$. Cette projection canonique s'identifie au morphisme canonique de $A \times B$ dans sa localisation par rapport à $(1, 0)$. En effet, si C est un anneau et si $f : A \to B \to C$ est un morphisme d'anneaux tel que $f(1, 0)$ est inversible, alors on a $f(0, b) = 0$ pour tout $b \in B$ car $f(0, b)f(1, 0) = f(0, 0) = 0$. Donc f se factorise de façon unique par la projection canonique $A \times B \to B$. D'après le théorème VI-1.19, on obtient que $\mathrm{Spec}(A)$ est aussi un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Spec}(A \times B)$. Par le même argument, on obtient que $\mathrm{Spec}(B)$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathrm{Spec}(A \times B)$.

D'après la proposition VI-1.6 (2) et (3), on a

$$\mathrm{Spec}(A) \cup \mathrm{Spec}(B) = V((\{0\} \times B) \cap (A \times \{0\})) = V(\{(0, 0)\}) = \mathrm{Spec}(A \times B)$$

et

$$\mathrm{Spec}(A) \cap \mathrm{Spec}(B) = V((\{0\} \times B) + (A \times \{0\})) = V(A \times B) = \varnothing.$$

Donc $\mathrm{Spec}(A \times B)$ est homéomorphe à la réunion disjointe de $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(B)$. □

1.23. Platitude

Soient A un anneau et M un A-module. Si le foncteur $- \otimes_A M : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ est exact, on dit que M est un A-module *plat*. Si B est une A-algèbre qui est un A-module plat (où on considère la structure de A-module canonique sur B), on dit que B est une A-algèbre *plate*.

Comme le foncteur de produit tensoriel $- \otimes_A M : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, il préserve les limites inductives, et en particulier, il préserve les conoyaux. Si

$$\mathbf{0} \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une suite exacte de morphismes de A-modules, alors la suite

$$N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exacte. Donc la platitude de M est équivalente à la condition suivante :

pour tout monomorphisme $f : N' \to N$ de A-module, le morphisme

$$f \otimes 1_M : N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M, \quad x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes y$$

est un monomorphisme.

1.24. Exemples. Soient A un anneau et S une famille multiplicative de A, alors $S^{-1}A$ est une A-algèbre plate.

Soient A un anneau et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules plats, alors la somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est un A-module plat. En effet, si $f : N' \to N$ est un monomorphisme de A-modules qui induit, pour tout $i \in I$, un monomorphisme $f_i : N' \otimes_A M_i \to N \otimes_A M_i$ par passage aux produits tensoriels, alors le morphisme

$$(f_i)_{i\in I} : N' \otimes_A \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} N' \otimes_A M_i \longrightarrow N \otimes_A \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} N \otimes_A M_i$$

est aussi un monomorphisme.

1.25. Remarque. Soient A un anneau et M un A-module plat. Le foncteur $- \otimes_A M : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ préserve les limites inductives (puisqu'il est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$) et les noyaux (car il est un foncteur exact). Il préserve donc les images. En particulier, si $f : N_1 \to N_2$ est un morphisme de A-modules et si $f_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ est le morphisme induit par f par passage aux produits tensoriels (f_M envoie $x \otimes y \in N_1 \otimes_A M$ sur $f(x) \otimes y$), alors l'image de f_M s'identifie à $f(N_1) \otimes_A M$.

1.26. Lemme. *Soient A un anneau et M un A-module. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, alors on a $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$, où $\mathfrak{a}M$ est le sous-module de M engendré par les éléments de la forme ax où $a \in \mathfrak{a}$ et $x \in M$.*

Démonstration. On une suite exacte de A-modules

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Comme le foncteur $- \otimes_A M$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, il préserve les conoyaux. En particulier, la suite

$$\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow (A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exacte. Comme $A \otimes_A M \cong M$ et comme l'image canonique de $\mathfrak{a} \otimes_A M$ dans $A \otimes_A M \cong M$ s'identifie à $\mathfrak{a}M$, on obtient $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$. □

1.27. Proposition. *Soient A un anneau et M un A-module* plat. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathfrak{m}M \neq M$.

(2) Pour tout A-module N, si le produit tensoriel $N \otimes_A M$ est nul, alors N est un module nul.

(3) Pour tout homomorphisme $f : N_1 \to N_2$ de A-modules, si

$$f_M : N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M, \quad x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes y$$

est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : On raisonne par absurde en supposant que le module N contient un élément non-nul x. Soit $f : A \to N$ l'homomorphisme tel que $f(a) = ax$ pour tout $a \in A$. Soient N_1 l'image de f et $\mathfrak{a}$ le noyau de f. On a $N_1 \cong A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est le noyau de f. Comme M est un A-module plat, l'homomorphisme canonique $N_1 \otimes_A M \to N \otimes_A M$ est un monomorphisme. En particulier, si $N \otimes_A M$ est nul, alors il en est de même de $N_1 \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$. Cela montre que $M = \mathfrak{a}M$ et donc $M = \mathfrak{m}M$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant $\mathfrak{a}$, ce qui est absurde.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Comme M est un A-module plat, on a

$$\mathrm{Ker}(f_M) \cong \mathrm{Ker}(f) \otimes_A M \ \text{ et } \ \mathrm{Coker}(f_M) \cong \mathrm{Coker}(f) \otimes_A M.$$

Si f_M est un isomorphisme, alors $\mathrm{Ker}(f_M)$ et $\mathrm{Coker}(f_M)$ sont nuls, d'où $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ sont nuls et donc f est un isomorphisme.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Si $\mathfrak{m}M = M$, alors l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m} \otimes_A M \to A \otimes_A M$ est un isomorphisme, et donc l'application d'inclusion $\mathfrak{m} \to A$ est un isomorphisme de A-modules, ce qui est absurde. □

1.28. Définition. Soient A un anneau et M un A-module plat. Si M satisfait aux conditions équivalentes de la proposition VI-1.27, on dit que M est un A-module *fidèlement plat*. Si une A-algèbre plate est fidèlement plat comme A-module, on dit qu'elle est une A-algèbre *fidèlement plate*.

1.29. Corollaire. *Soient A un anneau et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules plats. S'il existe au moins un indice $j \in I$ tel que M_j soit un A-module fidèlement plat, alors la somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est un A-module fidèlement plat.*

Démonstration. Soit N un A-module. On a

$$N \otimes_A \left(\bigoplus_{i\in I} M_i \right) \cong \bigoplus_{i\in I} N \otimes_A M_i.$$

Si ce module produit tensoriel est nul, alors $N \otimes_A M_i$ est nul pour tout $i \in I$. En particulier, on a $N \otimes_A M_j = \mathbf{0}$. Comme M_j est un A-module fidèlement plat, on obtient que N est nul. Le A-module $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est donc fidèlement plat. □

1.30. Exemples. Soit A un anneau. On a vue dans les exemples VI-1.24 que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la localisation $A_\mathfrak{m}$ est un A-module plat. En outre, la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spm}(A)} A_\mathfrak{m}$ est un A-module plat, où $\mathrm{Spm}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de A. C'est aussi un A-module fidèlement plat. En effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m} \neq A_\mathfrak{m}$ puisque $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de l'anneau local $A_\mathfrak{m}$ (cf. la remarque VI-1.21). Par la même raison, la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} A_\mathfrak{p}$ est un A-module fidèlement plat.

1.31. Proposition. *Soient A un anneau et M un A-module fidèlement plat.*

(1) Si $\varphi : N_1 \to N_2$ est un morphisme de A-module qui induit par passage aux produit tensoriel le morphisme nul $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$, alors le morphisme φ est nul.

(2) Si

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \tag{V.3}$$

est un diagramme de morphismes de A-modules qui induit une suite exacte

$$N' \otimes_A M \xrightarrow{f_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g_M} N'' \otimes_A M \tag{V.4}$$

par passage aux produits tensoriels, alors le diagramme initial est une suite exacte.

Démonstration. (1) Comme M est un A-module plat, le foncteur $- \otimes_A M$ préserve les images. En particulier, on a $\mathrm{Im}(\varphi) \otimes_A M \cong \mathrm{Im}(\varphi_M)$, où $\varphi_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ est le morphisme de A-module induit par φ par passage aux produits tensoriels. Comme φ_M est nul, on a $\mathrm{Im}(\varphi_M) = \mathbf{0}$. Donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{0}$ car M est fidèlement plat. On obtient donc que le morphisme φ est nul.

(2) Comme la suite (VI-VI.4) est exacte, on a $g_M f_M = 0$, d'où $gf = 0$ d'après le premier énoncé de la proposition. Soit $\psi : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ le morphisme canonique de A-modules. Comme la suite (VI-VI.4) est exacte, on obtient que

$$\psi_M : \mathrm{Im}(f_M) \cong \mathrm{Im}(f) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Ker}(g_M) \cong \mathrm{Ker}(g) \otimes_A M$$

induit par ψ par passage aux produits tensoriels est un isomorphisme. On en déduit que ψ est un isomorphisme (cf. la proposition VI-1.27 et la définition VI-1.28). Le diagramme (VI-VI.3) est donc une suite exacte. □

1.32. Proposition. *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que B soit une A-algèbre plate. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) B est une A-algèbre fidèlement plate.

(2) ${}^r\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ est une application surjective.

(3) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de B tel que ${}^r\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}$.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Montrons d'abord que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on a $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})B)$. Par définition, on a $\mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})B)$. En outre, la platitude de B comme A-algèbre montre que

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})B) \otimes_A B \cong \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})B))B = \varphi(\mathfrak{a})B \cong \mathfrak{a} \otimes_A B.$$

Comme B est une A-algèbre fidèlement plate, on obtient $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})B)$. En particulier, en prenant $\mathfrak{a} = \{0\}$ on obtient que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc φ est une application injective.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Soit $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Comme $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})B) = \mathfrak{p}$ et comme φ est une application injective, on obtient $\varphi(S) \cap \varphi(\mathfrak{p})B = \varnothing$. Cela montre que la localisation $\overline{\varphi(S)}^{-1}(B/\varphi(\mathfrak{p})B)$ est non-nulle, où $\overline{\varphi(S)}$ désigne l'image canonique de $\varphi(S)$ dans $B/\varphi(\mathfrak{p})B$. Donc il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ contenant $\varphi(\mathfrak{p})B$ tel que $\mathfrak{P} \cap \varphi(S) = \varnothing$ (d'après le théorème VI-1.19). Cela montre que ${}^r\varphi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Par la condition (2), on obtient qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B tel que ${}^r\varphi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de B contenant $\mathfrak{P}$. On a ${}^r\varphi(\mathfrak{M}) \sup {}^r\varphi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{m}$ et ${}^r\varphi(\mathfrak{M}) \in \operatorname{Spec} A$. Donc ${}^r\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}$.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Comme il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de B tel que ${}^r\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}$, on obtient $\varphi(\mathfrak{m})B \subset \mathfrak{M} \neq B$. D'après la proposition VI-1.27, on obtient que B est un A-module fidèlement plat.□

1.33. Corollaire. *Soient A un anneau et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A, qui engendre A comme un idéal de A. Alors la somme directe $\bigoplus_{i\in I} A_{f_i}$ est un A-module fidèlement plat.*

Démonstration. Il existe un sous-ensemble fini I_0 de I tel que $A = \sum_{i\in I_0} Af_i$. D'après la proposition VI-1.10 (2), on a $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I_0} D(f_i)$. La proposition VI-1.22 et le théorème VI-1.19 montrent que le morphisme d'anneaux canonique $A \to \prod_{i\in I_0} A_{f_i}$ induit une application surjective

$$\operatorname{Spec}\left(\prod_{i\in I_0} A_{f_i}\right) = \coprod_{i\in I_0} \operatorname{Spec}(A_{f_i}) = \coprod_{i\in I_0} D(f_i) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A).$$

D'après la proposition VI-1.32, $\prod_{i\in I_0} A_{f_i}$ est une A-algèbre fidèlement plate, et donc $\bigoplus_{i\in I_0} A_{f_i}$ est un A-module fidèlement plat. D'après le corollaire VI-1.29, on obtient que $\bigoplus_{i\in I} A_{f_i}$ est aussi un A-module fidèlement plat. □

1.34. Théorème. *Soient A un anneau, B une A-algèbre fidèlement plate, et M un A-module. Le diagramme suivant de morphisme de A-modules est une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_0} M \otimes_A B \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{\partial_2} \cdots, \tag{V.5}$$

où $\partial_0(x) = x \otimes 1$ pour tout $x \in M$, et

$$\partial_n : M \otimes_A B^{\otimes_A n} \longrightarrow M \otimes_A B^{\otimes_A (n+1)}$$

envoie $x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n$ sur

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_n.$$

Démonstration. Montrons d'abord que (VI-VI.5) est un complexe de cochaînes dans la catégorie A-**Mod**. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}\partial_n(x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\
=&\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \partial_{n+1}(x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_n) \\
=&\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \lambda_{ij} x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_j \otimes 1 \otimes b_{j+1} \otimes \cdots \otimes b_n,
\end{aligned}$$

où $\lambda_{ij} = (-1)^{2n-i-j} + (-1)^{2n+1-i-j} = 0$. D'où $\partial_{n+1}\partial_n = 0$.

Soit C le complexe de cochaîne

$$\mathbf{0} \longrightarrow M \otimes_A B \xrightarrow{d_0} M \otimes_A B^{\otimes_A 2} \xrightarrow{d_1} M \otimes_A B^{\otimes_A 3} \xrightarrow{d_2} \cdots,$$

où $d_n = \partial_n \otimes 1_B$ Montrons que C est en fait une suite exacte. Pour cela on construit une homotopie de 1_C vers le morphisme nul de C vers lui-même. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$s_n : M \otimes_A B^{\otimes_A (n+2)} \longrightarrow M \otimes_A B^{\otimes_A (n+1)}$$

tel que $s_n(x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+2}) = x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \otimes b_{n+1} b_{n+2}$. On a

$$s_0 d_0(x \otimes b) = s_0(x \otimes 1 \otimes b) = x \otimes b$$

pour tous $x \in M$ et $b \in B$. En outre, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
&(d_n s_n + s_{n+1} d_{n+1})(x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \otimes b_{n+2}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_n \otimes b_{n+1} b_{n+2}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_n \otimes b_{n+1} b_{n+2} \\
&\quad + x \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \otimes b_{n+2}.
\end{aligned}$$

On obtient donc que $d_n s_n + s_{n+1} d_{n+1}$ s'identifie au morphisme d'identité de $M \otimes_A B^{\otimes_A (n+2)}$. Par conséquent, 1_C est homotope au morphisme nul et donc C est l'objet nul dans la catégorie homotopique de A-**Mod**. En particulier, les cohomologies du complexe C sont nulles et C est une suite exacte.

Comme B est une A-algèbre fidèlement plate, par la proposition VI-1.31 on obtient que (VI-VI.5) est une suite exacte. Le théorème est donc démontré. □

1.35. Faisceau structural

Soit A un anneau. On définit un faisceau d'anneaux sur $\mathrm{Spec}(A)$ de sorte que $\mathrm{Spec}(A)$ devienne un espace localement annelé. On démontre ensuite que le spectre premier définit en fait un foncteur pleinement fidèle de la catégorie opposée des anneaux dans la catégorie des espaces localement annelés.

Si U est un ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$, on désigne par S_U l'ensemble

$$A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} \mathfrak{p}.$$

C'est une famille multiplicative de A. Si U et U' sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathrm{Spec}(A)$ tels que $U \subset U'$, alors on a $S_{U'} \subset S_U$. La propriété universelle de limite inductive induit un homomorphisme d'anneaux de $S_{U'}^{-1} A$ dans $S_U^{-1} A$, Ainsi $U \mapsto S_U^{-1} A$ définit un préfaisceau d'anneaux sur l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ que l'on note Pf_A. On désigne par $\widetilde{A}$ le faisceau d'anneaux associé au préfaisceau Pf_A.

1.36. Lemme. *Soit A un anneau.*

(1) Soient b est un élément de A et S_b la famille multiplicative

$$A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in D(b)} \mathfrak{p}.$$

Alors la localisation $S_b^{-1} A$ est canoniquement isomorphe à A_b.

(2) Soient s et t deux éléments de A. Le produit tensoriel $A_s \otimes_A A_t$ est canoniquement isomorphe à A_{st}.

Démonstration. (1) On a

$$S_b := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in D(b)} \mathfrak{p} = A \setminus \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ b \notin \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

Montrons que, si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors $\varphi(b)$ est inversible si et seulement si $\varphi(s)$ est inversible pour tout $s \in S_b$. D'abord, par définition on a $b \in S_b$. Il reste donc à montrer que, si $\varphi(b)$ est inversible, alors pour tout $s \in S_b$, $\varphi(s)$ l'est aussi. Supposons le contraire, alors $\varphi(s)$ appartient à un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B (cf. la proposition VI-1.5 (4)). L'idéal premier $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ne contient pas b car $\varphi(b)$ est inversible et donc n'appartient pas à $\mathfrak{m}$. Cependant, on a $s \in \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ par définition, ce qui conduit à une contradiction. Les anneaux $S_b^{-1}A$ et A_b représentent donc le même foncteur (cf. la proposition VI-1.16) et donc sont canoniquement isomorphes.

(2) est une conséquence du corollaire VI-1.17 en remarquant que A_{st} est canoniquement isomorphe à la localisation de A par rapport à la famille multiplicative $S = \{s^n t^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$. En effet, pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$, si $\varphi(st)$ est inversible, alors $\varphi(s)$ et $\varphi(t)$ sont tous inversibles. On en déduit que $\varphi(u)$ est inversible pour tout $u \in S$ si et seulement si $\varphi(st)$ est inversible. Par la proposition VI-1.16, on obtient $S^{-1}A \cong A_{st}$. □

1.37. Proposition. *Pour tout anneau A, le couple $(\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$ est un espace localement annelé.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Par définition, $\widetilde{A}_\mathfrak{p}$ s'identifie à $\varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} S_U^{-1}A$. On a

$$\bigcup_{U \ni \mathfrak{p}} S_U = A \setminus \mathfrak{p}. \tag{V.6}$$

En effet, par définition on a $S_U \subset A \setminus \mathfrak{p}$ lorsque $\mathfrak{p} \in U$. Réciproquement, si f est un élément de $A \setminus \mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p} \notin V(Af)$. Soit $U = \mathrm{Spec}\, A \setminus V(Af)$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ dans U, on a $f \notin \mathfrak{q}$. Donc $f \in S_U$. On déduit donc de la relation (VI-VI.6) que $\widetilde{A}_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$, qui est un anneau local (cf. le corollaire VI-1.20). □

1.38. Remarque. La correspondance $\mathrm{Spec} : A \mapsto (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$ définit un foncteur de la catégorie opposée des anneaux $\mathbf{An}^{\mathrm{o}}$ dans la catégorie **Ela** des espaces localement annelés. En effet, si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux et si U est un ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$, alors on a $\varphi(s) \in S_{r_{\varphi^{-1}}(U)}$ pour

tout $s \in S_U$. En effet, si $\varphi(s) \notin S_{r_{\varphi^{-1}}(U)}$, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in U$ et que $\varphi(s) \in \mathfrak{q}$. On en déduit que $s \notin S_U$ car $s \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. La propriété universelle de limite inductive induit alors un homomorphisme d'anneaux de $S_U^{-1}A$ dans $S_{r_{\varphi^{-1}}(U)}^{-1}B$. Cette construction est fonctorielle en U et définit un morphisme de préfaisceaux d'anneaux de Pf_A dans ${}^r\varphi_*(\mathrm{Pf}_B)$. La composée de ce morphisme avec le morphisme canonique ${}^r\varphi_*(\mathrm{Pf}_B) \to {}^r\varphi_*(\widetilde{B})$ donne un morphisme de préfaisceaux $\mathrm{Pf}_A \to {}^r\varphi_*(\widetilde{B})$ qui induit un morphisme de faisceaux $\widetilde{A} \to {}^r\varphi_*(\widetilde{B})$. En outre, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B et $\mathfrak{p} = {}^r\varphi(\mathfrak{q})$, alors l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{q}} : A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est local car il envoie $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ dans $\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$.

1.39. Théorème. *Le foncteur* Spec *de la catégorie opposée des anneaux* $\mathbf{An}^{\mathrm{o}}$ *dans la catégorie* **Ela** *des espaces localement annelés est adjoint à droite du foncteur qui envoie chaque espace localement annelé X sur l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$. En d'autre termes, on a une bijection*

$$\mathbf{Ela}(X, \operatorname{Spec} A) \longrightarrow \mathbf{An}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

qui est fonctorielle en $X \in \mathbf{Ela}$ et $A \in \mathbf{An}$.

Démonstration. Soient X un espace localement annelé, A un anneau et $\Phi : X \to \operatorname{Spec} A$ un morphisme d'espace localement annelé. Le morphisme de faisceaux d'anneaux $\Phi_\# : \widetilde{A} \to \Phi_*(\mathcal{O}_X)$ induit un homomorphisme d'anneaux $A \to \mathcal{O}_X(X)$. On obtient ainsi une application qui est fonctoriel en X et en A

$$\mathbf{Ela}(X, \operatorname{Spec} A) \longrightarrow \mathbf{An}(A, \mathcal{O}_X(X)) = \mathbf{An}^{\mathrm{o}}(\mathcal{O}_X(X), A).$$

Réciproquement, étant donné un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \to \mathcal{O}_X(X)$, on considère l'application $g : X \to \operatorname{Spec} A$ qui envoie $x \in X$ en le noyau de l'homomorphisme composé

$$A \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x,$$

où $\mathfrak{m}_x$ est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, alors $g(x) \in D(\mathfrak{a})$ si et seulement s'il existe $f \in \mathfrak{a}$ tel que $\phi(f)(x) \neq 0$. Cela montre que

$$g^{-1}(D(\mathfrak{a})) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(\phi(f))$$

est un ouvert. Donc g est une application continue. En outre, l'homomorphisme composé

$$A \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(g^{-1}(D(\mathfrak{a})))$$

se factorise de façon unique par $S(\mathfrak{a})^{-1}A$, où

$$S(\mathfrak{a}) = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p}.$$

On obtient donc un morphisme du préfaisceau $D(\mathfrak{a}) \mapsto S(\mathfrak{a})^{-1}A$ vers $g_*\mathcal{O}_X$, qui induit un morphisme de faisceaux $\widetilde{A} \to g_*\mathcal{O}_X$. On obtient ainsi un morphisme d'espaces annelé. En outre, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme d'anneaux $A_{g(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme local. □

1.40. Corollaire. *L'objet terminal de la catégorie* **Ela** *est* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit X un espace localement annelé. On a

$$\mathbf{Ela}(X, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \cong \mathbf{An}^{\circ}(\mathcal{O}_X(X), \mathbb{Z}) = \mathbf{An}(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_X(X)),$$

qui ne contient qu'un seul élément. □

1.41. Corollaire. *Soient A un anneau, et B et C deux algèbres. On a*

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \cong \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C.$$

dans la catégorie des espaces localement annelés.

Démonstration. L'anneau $B \otimes_A C$ est le coproduit cofibré de $A \to B$ et $A \to C$ dans la catégorie **An** des anneaux, et donc est le produit fibré de $B \to A$ et $C \to A$ dans la catégorie opposée $\mathbf{An}^{\circ}$. Comme le foncteur Spec est adjoint à droite, il préserve les limites projectives. En particulier, on a $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \cong \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$. □

1.42. Théorème. *Soient A un anneau et U un ouvert de A. On suppose que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ ne rencontrant pas S_U, on a $\mathfrak{p} \in U$. Alors le morphisme canonique $\operatorname{Pf}_A(U) \to \widetilde{A}(U)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soient $B = S_U^{-1}A$ and $\varphi : A \to B$ le morphisme canonique. Pour tout recouvrement *fini* de U par des ouverts de la forme $(D(s_i))_{i\in I}$, le diagramme

$$\operatorname{Pf}_A(U) \xrightarrow{\varphi} \prod_{i\in I} \operatorname{Pf}_A(D(s_i)) \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} \operatorname{Pf}_A(D(s_j) \cap D(s_k)) \tag{V.7}$$

identifie φ au noyau de (q_1, q_2), où φ est induit par les morphismes de restrictions

$$\operatorname{Pf}_A(U) = B \longrightarrow \operatorname{Pf}_A(D(s_i)) \cong A_{s_i} \cong B_{\varphi(s_i)},$$

q_1 est induit par les morphismes de restrictions

$$\mathrm{Pf}_A(D(s_j)) \cong B_{\varphi(s_j)} \longrightarrow \mathrm{Pf}_A(D(s_j)\cap D(s_k)) \cong B_{\varphi(s_j s_k)} \cong B_{\varphi(s_j)} \otimes_B B_{\varphi(s_k)},$$

et q_2 est induit par les morphisme de restrictions

$$\mathrm{Pf}_A(D(s_k)) \cong B_{\varphi(s_k)} \longrightarrow \mathrm{Pf}_A(D(s_j)\cap D(s_k)) \cong B_{\varphi(s_j s_k)} \cong B_{\varphi(s_j)} \otimes_B B_{\varphi(s_k)}.$$

En effet, d'après le théorème VI-1.19, l'application ${}^r\varphi$ définit un homéomorphisme entre les espaces topologiques $\mathrm{Spec}(B)$ et U. En particulier, $\mathrm{Spec}(B)$ est recouvert par les ouverts de la forme $D(\varphi(s_i))$, $i \in I$, et donc B est engendré par les $(\varphi(s_i))_{i\in I}$ (cf. la proposition VI-1.10). Le B-module $\bigoplus_{i\in I} B_{\varphi(s_i)}$ est donc fidèlement plat, et donc $C := \prod_{i\in I} B_{\varphi(s_i)}$ est une B-algèbre fidèlement plate (car il est isomorphe à $\bigoplus_{i\in I} B_{\varphi(s_i)}$ en tant que B-module). Le fait que $\varphi = \mathrm{Ker}(q_1, q_2)$ provient donc du théorème VI-1.34 en remarquant que

$$C \otimes_B C \cong \prod_{(j,k)\in I^2} B_{\varphi(s_j)} \otimes_B B_{\varphi(s_k)}.$$

On considère maintenant un recouvrement général $(U_j)_{j\in J}$ de U par des ouverts de $\mathrm{Spec}\, A$. Montrons que le diagramme

$$\mathrm{Pf}_A(U) \xrightarrow{\psi} \prod_{i\in I} \mathrm{Pf}_A(U_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} \mathrm{Pf}_A(U_j \cap U_k) \tag{V.8}$$

identifie ψ au noyau de (p_1, p_2), où φ est induit par les morphismes de restriction $\mathrm{Pf}_A(U) \to \mathrm{Pf}_A(U_i)$, p_1 et p_2 sont induit par les morphismes de restrictions

$$\mathrm{Pf}_A(U_j) \to \mathrm{Pf}_A(U_j \cap U_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Pf}_A(U_k) \to \mathrm{Pf}_A(U_j \cap U_k)$$

respectivement. Comme U est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(B)$, il est quasi-compact (cf. la proposition VI-1.10). Comme les ouverts de la formes $D(s)$, $s \in A$ forment une base de topologie de $\mathrm{Spec}\, A$, il existe un recouvrement fini de U de la forme $(D(s_i))_{i\in I}$, qui est plus fin que $(U_j)_{j\in J}$. On obtient que $\mathrm{Pf}_A(U) \to \mathrm{Pf}^{\dagger}_A(U)$ est un isomorphisme. Comme U est arbitraire, si on applique encore une fois le même argument, on obtient que $\mathrm{Pf}_A(U) \to \widetilde{A}(U)$ est un isomorphisme. □

1.43. Corollaire. *Le foncteur* $\mathrm{Spec} : \mathbf{An}^\circ \to \mathbf{Ela}$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. Soient A et B deux anneaux. D'après le théorème VI-1.39, on a une bijection canonique

$$\mathbf{Ela}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A) \cong \mathbf{An}(A, \widetilde{B}(\mathrm{Spec}\, B)).$$

D'après le théorème VI-1.42, on a $\widetilde{B}(\operatorname{Spec} B) \cong B$. Donc $\mathbf{Ela}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{An}(A, B)$. □

2. Réalisation géométrique de foncteurs

Rappelons que l'on a fixé deux univers $\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{U}$ tels que $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{U}$ et on désigne par $\mathbf{M}$ la catégorie des modèles dans $\mathfrak{U}_0$ de la théorie du premier ordre des anneaux. Toutes les catégories dans le paragraphe sont considérée comme des $\mathfrak{U}$-catégories. Ainsi M est une catégorie petite. Si X est un espace localement annelé, on désigne par $\mathfrak{S}_X$ le foncteur de $\mathbf{M}$ dans **Ens** qui envoie tout anneau $A \in \mathbf{M}$ sur l'ensemble $\mathbf{Ela}(\operatorname{Spec} A, X)$. Cela définit un foncteur de la catégorie **Ela** des espaces localement annelés dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$. Le but du paragraphe est de démontrer que ce foncteur admet un adjoint à gauche (cf. le théorème VI-2.4).

Le lemme de Yoneda montre que l'on a une bijection

$$\mathbf{Ela}(\operatorname{Spec} A, X) =: \mathfrak{S}_X(A) \cong \operatorname{Nat}(h_A, \mathfrak{S}_X) \tag{V.9}$$

qui est fonctorielle en $X \in \mathbf{Ela}$ et $A \in \mathbf{M}$. Cela donne la bijection (VI-VI.12) dans le cas où F est un foncteur représentable. Le théorème consiste à étendre ce résultat au cas d'un foncteur général. Le point clé est le fait que tout foncteur d'une catégorie petite dans la catégorie des ensembles est une limite inductive de foncteurs représentables.

2.1. Limite inductive de foncteurs représentables

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles. On désigne par I_F l'ensemble des couples (A, ρ), où A est un objet de $\mathcal{C}$ et ρ est un élément de $F(A)$. Si (A, ρ) et (A', ρ') sont deux éléments de I_F, on définit

$$I_F\big((A, \rho), (A', \rho')\big) = \{f \in \mathcal{C}(A, A') \mid F(f)(\rho) = \rho'\}.$$

Si (A, ρ), (A', ρ') et (A'', ρ'') sont trois éléments de I_F, et si

$$f \in I_F((A, \rho), (A', \rho')) \text{ et } g \in I_F((A', \rho'), (A'', \rho'')),$$

alors gf est un morphisme de A vers A'' et $F(gf) = F(g)F(f)$ envoie $\rho \in F(A)$ sur $\rho'' \in F(A'')$. Ainsi I_F est une catégorie petite.

2.2. Lemme. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ deux foncteurs. L'application*

$$\operatorname{Nat}(F, G) \longrightarrow \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} G(A) \tag{V.10}$$

qui envoie $\varphi \in \operatorname{Nat}(F, G)$ sur $(\varphi_A(\rho))_{(A,\rho)\in I_F}$ est une bijection, où dans la limite projective on a considéré le foncteur de I_F dans **Ens** *qui envoie*

(A,ρ) *sur* $G(A)$ *et* $f:(A,\rho)\to(A',\rho')$ *sur* $G(f):G(A)\to G(A')$.

Démonstration. Par définition, $\mathrm{Nat}(F,G)$ est le sous-ensemble de

$$\prod_{A\in\mathcal{C}}\mathbf{Ens}(F(A),G(A))=\prod_{(A,\rho)\in I_F}G(A)$$

des éléments

$$(\varphi_A:F(A)\to G(A))_{A\in\mathcal{C}}=(\varphi_A(\rho))_{(A,\rho)\in I_F}$$

tels que $\varphi_{A'}F(f)=G(f)\varphi_A$ pour tout morphisme $f:A\to A'$. Cette condition renvient à dire que l'on a

$$\varphi_{A'}(\rho')=G(f)(\varphi_A(\rho))$$

pour tout morphisme $f:(A,\rho)\to(A',\rho')$ dans I_F, qui correspond à la propriété universelle définissant la limite projective dans (VI-VI.10). □

2.3. Théorème. *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie petite et* $F:\mathcal{C}\to\mathbf{Ens}$ *un foncteur. La famille de morphismes de foncteurs* $(\rho:h_A\to F)_{(A,\rho)\in I_F^\circ}$ *définit un isomorphisme*

$$\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ}h_A\cong F, \tag{V.11}$$

où on a considéré $\rho\in F(A)$ *comme un morphisme de foncteurs de* h_A *dans* F *via le lemme de Yoneda (cf. §I-4.3).*

Démonstration. Pour tout foncteur $G\in\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Nat}(\varinjlim_{(A,\rho)}h_A,G)\cong\varprojlim_{(A,\rho)}\mathrm{Nat}(h_A,G)\cong\varprojlim_{(A,\rho)}G(A)\cong\mathrm{Nat}(F,G),$$

où le premier isomorphisme provient de la proposition **??**, le deuxième isomorphisme résulte du lemme de Yoneda et le dernière isomorphisme provient du lemme VI-2.2. On obtient alors que $\varinjlim_{(A,\rho)}h_A$ et F représentent le même foncteur de la catégorie $\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})$ dans **Ens**. Ils sont donc isomorphes, compte tenu du corollaire I-4.7. □

Le résultat du lemme VI-2.2 appliqué au cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des modèles $\mathbf{M}$ conduit au théorème suivant.

2.4. Théorème. *Le foncteur de* **Ela** *dans* $\mathbf{Fon}(\mathbf{M},\mathbf{Ens})$*, qui envoie tout espace localement annelé* X *sur le foncteur* $\mathfrak{S}_X$ *associant à tout anneau* $A\in\mathbf{M}$ *l'ensemble* $\mathbf{Ela}(\mathrm{Spec}\,A,X)$*, admet un adjoint à gauche* Rg. *En d'autres*

termes, on a une bijection

$$\mathbf{Ela}(\mathrm{Rg}(F), X) \cong \mathrm{Nat}(F, \mathfrak{S}_X) \tag{V.12}$$

qui est fonctorielle en $X \in \mathbf{Ela}$ *et en* $F \in \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$.

Démonstration. Si F un foncteur de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{Ens}$, on construit $\mathrm{Rg}(F)$ comme la limite inductive

$$\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathrm{Spec}\, A$$

dans la catégorie $\mathbf{Ela}$. Cette construction définit un foncteur de $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ dans $\mathbf{Ela}$. En outre, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Ela}(\mathrm{Rg}(F), X) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} \mathbf{Ela}(\mathrm{Spec}\, A, X) = \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} \mathfrak{S}_X(A) \cong \mathrm{Nat}(F, \mathfrak{S}_X),$$

qui sont fonctoriels par rapport à $X \in \mathbf{Ela}$ et $F \in \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$, où le dernier isomorphisme provient du lemme VI-2.2. Le théorème est donc démontré. □

2.5. Définition. Soit F un foncteur de $\mathbf{M}$ dans la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles. L'espace localement annelé $\mathrm{Rg}(F)$ est appelé *réalisation géométrique* du foncteur F.

On appelle *schéma affine* tout espace localement annelé qui est isomorphe au spectre premier d'un anneau dans $\mathbf{M}$. Par définition, la réalisation géométrique d'un foncteur représentable est un schéma affine, et la réalisation géométrique d'un foncteur général est une limite inductive de schéma affines.

2.6. Remarque. Le foncteur $\mathrm{Rg} : \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Ela}$ est adjoint à gauche du foncteur $X \mapsto \mathfrak{S}_X$, il préserve donc les limites inductives. Cela confirme la construction de Rg comme limite inductive de spectres premiers, compte tenu de la relation (VI-VI.11).

3. Construction ensembliste de la réalisation géométrique

Dans la pratique, la forme explicite du foncteur réalisation géométrique Rg est utile. D'après le lemme de Yoneda, on obtient que la réalisation géométrique d'un foncteur représentable $h_A : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ est $\mathrm{Spec}\, A$. Cependant, la construction de $\mathrm{Spec}\, A$ comme l'ensemble des idéaux premiers ne se généralise pas directement au cas d'un foncteur général. Pour surmonter cette difficulté, on introduit une autre construction du spectre premier d'un anneau.

3.1. Proposition. *Soit X un espace localement annelé. Pour tout corps k, soit λ_k l'application de $\mathfrak{S}_X(k)$ dans X qui envoie tout morphisme $f : \operatorname{Spec} k \to X$ sur l'image de l'unique point de* $\operatorname{Spec} k$ *par f. Alors le système d'applications $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Cps}}$ identifie l'ensemble X à la limite inductive de $\mathfrak{S}_X|_{\mathbf{Cps}}$.*

Démonstration. Soient E un ensemble et $(\varphi_k : \mathfrak{S}_X(k) \to E)_{k\in\mathbf{Cps}}$ une famille d'applications telle que, pour tout pour tout couple (k, K) de corps et tout morphisme de corps $g : k \to K$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_X(k) & \xrightarrow{\varphi_k} & E \\ {\scriptstyle \mathfrak{S}_X(g)}\downarrow & \nearrow_{\varphi_K} & \\ \mathfrak{S}_X(K) & & \end{array} \tag{V.13}$$

On montrera qu'il existe un unique application $\varphi : X \to E$ telle que, pour tout corps $k \in \mathbf{Cps}$, l'application composée $\mathfrak{S}_X(k) \xrightarrow{\lambda_k} X \xrightarrow{\varphi} E$ s'identifie à φ_k.

On remarque d'abord que, si une telle application φ existe, elle est nécessairement unique. En effet, si x est un point de X, alors il induit un morphisme d'espaces localement annelé $P_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$, où $\kappa(x)$ désigne le corps résiduel du point x. L'application φ, si elle existe, doit envoyer le point $x \in X$ sur $\varphi_{\kappa(x)}(P_x)$.

Il reste à vérifier que, pour tout corps $k \in \mathbf{Cps}$, l'application $\varphi : X \to E$ envoyant $x \in X$ sur $\varphi_{\kappa(x)}(P_x)$, composée avec l'application canonique λ_k, s'identifie à φ_k. Soient $f : \operatorname{Spec} k \to X$ un morphisme d'espaces localement annelés et x son image. Soit $\rho_x : \kappa(x) \to k$ le morphisme de corps déterminé par f. L'application $\mathfrak{S}_X(\rho_x)$ envoie $P_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ sur l'application composée $P_x \circ \operatorname{Spec}(\rho_x) : \operatorname{Spec} k \to X$, qui s'identifie à f. On obtient donc

$$\varphi\lambda_k(f) = \varphi(x) = \varphi_{\kappa(x)}(P_x) = \varphi_k(\mathfrak{S}_X(\rho_x)(P_x)) = \varphi_k(P_x \circ \operatorname{Spec} \rho_x) = \varphi_k(f),$$

où la troisième égalité provient de la commutativité du diagramme (VI-VI.13).□

Comme les limites inductives se commutent, on obtient le résultat suivant.

3.2. Corollaire. *Ensemblistement on a une bijection entre* $\operatorname{Rg}(F)$ *et* $\varinjlim F|_{\mathbf{Cps}}$ *qui est fonctorielle en $F \in \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$.*

Démonstration. L'espace annelé $\operatorname{Rg}(F)$ est défini comme une limite inductive

$$\operatorname{Rg}(F) \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \operatorname{Spec} A.$$

Ensemblistement on a alors des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Rg}(F) \cong \varinjlim_{(A,\rho)} \varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} \mathbf{M}(A,k) \cong \varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} \varinjlim_{(A,\rho)} h_A(k) \cong \varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} F(k).$$

□

3.3. Définition. Soit $F : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On appelle *sous-foncteur* de F tout foncteur $G \in \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ muni d'un monomorphisme $\varphi : G \to F$ dans la catégorie de foncteurs (i.e. $\varphi_A : G(A) \to F(A)$ est une application injective pour tout $A \in \mathbf{M}$). On dit que deux sous-foncteurs (G, φ) et (G', φ') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\psi : G \to G'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & \nearrow_{\varphi'} & \\ G' & & \end{array}$$

Cette condition revient à dire que, pour tout $A \in \mathbf{M}$, les images de φ_A et de φ'_A sont identiques.

3.4. Exemple. Soient X un espace localement annelé et $\mathfrak{S}_X : \mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout anneau A sur $\mathbf{Ela}(\operatorname{Spec} A, X)$. Si U est un sous-ensemble ouvert X muni du faisceau d'anneaux restreint, alors $\mathfrak{S}_U$ est un sous-foncteur de $\mathfrak{S}_X$, appelé *sous-foncteur défini par l'ouvert* U.

3.5. Définition. Soient $F \in \mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ un foncteur et $\varphi : G \to F$ est un sous-foncteur de F. Si, pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$, le sous-foncteur

$$\mathrm{pr}_1 : h_A \times_F G \longrightarrow h_A$$

du foncteur représentable $h_A \cong \mathfrak{S}_{\operatorname{Spec} A}$ est isomorphe au sous-foncteur défini par un ouvert de $\operatorname{Spec} A$, on dit que φ est une *immersion ouverte*.

3.6. Définition. Soit $G : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Pour tout $x \in \mathrm{Rg}(G)$ et tout corps $k \in \mathbf{Cps}$, on désigne par $G_x(k)$ le sous-ensemble de $G(k)$ qui consiste des points dont l'image dans $\varinjlim G|_{\mathbf{Cps}}$ s'identifie à x. Si U est un sous-ensemble de $\mathrm{Rg}(G)$, on désigne par $G_U : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout anneau $A \in \mathbf{M}$ sur

$$\Big\{\rho \in G(A) \,\Big|\, \forall\, k \in \mathbf{Cps},\ \forall f \in \mathbf{M}(A,k),\ G(f)(\rho) \in \bigcup_{x\in U} G_x(k)\Big\}.$$

C'est un sous-foncteur de G.

3.7. Proposition. *L'application canonique*

$$\varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} G_U(k) \longrightarrow \varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} G(k) \cong \mathrm{Rg}(G)$$

identifie $\varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} G_U(k)$ *au sous-ensemble* U *de* $\mathrm{Rg}(G)$*. En outre, si* $\varphi : F \to G$ *est un morphisme de foncteurs dans* $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ *et si* V *est l'image réciproque de* U *par* $\mathrm{Rg}(\varphi)$*, alors pour tout anneau* $A \in \mathbf{M}$ *on a*

$$F_V(A) = \varphi_A^{-1}(G_U(A)).$$

En particulier, on a $F_V \cong F \times_G G_U$*.*

Démonstration. Dans la catégorie des ensembles, la limite inductive

$$\varinjlim_{k\in\mathbf{Cps}} G(k) \cong \mathrm{Rg}(G)$$

est construite comme la réunion disjointe des ensembles $(G(k))_{k\in\mathbf{Cps}}$, modulo la relation d'équivalence engendrée par la relation binaire

$$(x \in G(k)) \sim (y \in G(K)) \Longleftrightarrow \exists f \in \mathbf{Cps}(k, K),\ G(f)(x) = y.$$

Pour tout corps $k \in \mathbf{Cps}$, $G_U(k)$ est le sous-ensemble de $G(k)$ des éléments dont les images dans $\mathrm{Rg}(G)$ appartiennent à U. On obtient donc le premier énoncé.

Soient $A \in \mathbf{M}$ et ρ un élément de $F(A)$. Alors ρ est un élément de $F_V(A)$ si et seulement si, pour tout corps $k \in \mathbf{Cps}$ et tout $f \in \mathbf{M}(A, k)$, l'image canonique de $F(f)(\rho)$ dans $\mathrm{Rg}(F)$ appartient à $V = \mathrm{Rg}(\varphi)^{-1}(U)$. Comme le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) & \longrightarrow & \mathrm{Rg}(F) \\ {\scriptstyle\varphi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Rg}(\varphi)} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(k) & \longrightarrow & \mathrm{Rg}(G) \end{array}$$

cela revient à dire que l'image canonique de $G(f)(\varphi_A(\rho))$ dans $\mathrm{Rg}(G)$ appartient à U. Donc $\rho \in F_V(A)$ si et seulement si $\varphi_A(\rho) \in G_U(A)$. □

3.8. Proposition. *Soient* X *un espace localement annelé,* U *une partie ouverte de* X *et* $\widetilde{U}$ *l'image réciproque de* U *par l'application canonique* $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_X) \to X$ *(correspondante à* $1_{\mathfrak{S}_X}$ *via l'adjonction entre* Rg *et le foncteur* $X \mapsto \mathfrak{S}_X$*). Alors* $(\mathfrak{S}_X)_{\widetilde{U}}$ *s'identifie au sous-foncteur* $\mathfrak{S}_U$ *de* $\mathfrak{S}_X$*.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbf{M}$. Par définition, $(\mathfrak{S}_X)_{\widetilde{U}}(A)$ est l'ensemble des morphismes $\rho : \mathrm{Spec}\, A \to X$ tels que, pour tout morphisme d'anneaux f de

A dans un corps $k \in \mathbf{Cps}$, l'image canonique de

$$\mathfrak{S}_X(f)(\rho) = \rho \circ \mathrm{Spec}(f)$$

dans $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_X)$ appartient à $\widetilde{U}$ (qui revient à dire que $\rho \circ \mathrm{Spec}(f)$ envoie l'unique point de $\mathrm{Spec}(k)$ dans U).

Tout un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est l'image du point unique de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}))$ par l'application $\mathrm{Spec}(f_\mathfrak{p}) : \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})) \to \mathrm{Spec}\, A$, où $f_\mathfrak{p}$ est l'homomorphisme d'anneaux composé $A \to A/\mathfrak{p} \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. On obtient donc que, pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout morphisme d'espace localement annelé $\rho : \mathrm{Spec}\, A \to X$, $\rho \in (\mathfrak{S}_X)_{\widetilde{U}}(A)$ si et seulement si l'image de ρ est contenu dans U. Par conséquent, on a $(\mathfrak{S}_X)_{\widetilde{U}} = \mathfrak{S}_U$. □

3.9. Corollaire. *Soit B un anneau dans $\mathbf{M}$. Pour tout ouvert U de $\mathrm{Spec}\, B$, les sous-foncteurs $(h_B)_U$ et $\mathfrak{S}_U$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. D'après (VI-VI.9) et le corollaire VI-1.43, on a des bijections naturelles

$$\mathrm{Nat}(h_A, \mathfrak{S}_{\mathrm{Spec}\, B}) \cong \mathbf{Ela}(\mathrm{Spec}\, A, \mathrm{Spec}\, B) \cong \mathbf{M}(B, A) \cong \mathrm{Nat}(h_A, h_B).$$

Cela montre que la réalisation géométrique du foncteur représentable $h_B : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ est l'espace localement annelé $\mathrm{Spec}\, B$. D'après la proposition VI -3.8, pour tout sous-ensemble ouvert U de $\mathrm{Spec}\, B$, les sous-foncteurs $\mathfrak{S}_U$ et $(h_B)_U$ du foncteur $\mathfrak{S}_{\mathrm{Spec}\, B} \cong h_B$ sont canoniquement isomorphes. □

3.10. Proposition. *Soit $F : \mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. La correspondance $U \mapsto F_U$ donne une bijection entre l'ensemble des ouverts de $\mathrm{Rg}(F)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'immersions ouvertes dans F. En outre, si $\varphi : G \to F$ est une immersion ouverte, alors $\mathrm{Rg}(\varphi) : \mathrm{Rg}(G) \to \mathrm{Rg}(F)$ donne un homéomorphisme de $\mathrm{Rg}(G)$ dans un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$, qui correspondant à la classe d'isomorphisme du sous-foncteur G par cette bijection.*

Démonstration. D'après la construction de $\mathrm{Rg}(F)$ comme limite inductive de spectre premiers, si U est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$, alors pour tout $(A, \rho) \in I_F$, le sous-ensemble $V = \mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)$ de $\mathrm{Spec}\, A$ est ouvert. D'après la proposition VI-3.7 et le corollaire VI-3.9, on obtient

$$h_A \times_F F_U \cong (h_A)_V \cong \mathfrak{S}_V.$$

Donc $F_U \to F$ est une immersion ouverte.

Il reste à montrer que, pour toute immersion ouverte $i : G \to F$, il existe un et un seul sous-ensemble ouvert U de $\mathrm{Rg}(F)$ tel que G soit isomorphe à F_U. On commence par vérifier l'unicité. Soient U et V deux sous-ensemble

ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$ qui sont distincts. On suppose en outre que U n'est pas contenu dans V. Il existe alors un point $x \in U \setminus V$. Soit $k \in \mathbf{Cps}$ un corps tel que x se relève en un élément ρ de $F(k)$. On a alors $\rho \in F_U(k)$ mais $\rho \notin F_V(k)$. Cela montre que $F_U \neq F_V$.

Dans la suite, on montre que toute immersion ouverte $G \to F$ est isomorphe à un sous-foncteur de la forme F_U, où U est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$. Pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout élément $\rho \in F(A)$ (qui peut être vu comme un morphisme de foncteur $h_A \to F$), par définition il existe un unique sous-ensemble ouvert $U_{(A,\rho)}$ de $\operatorname{Spec} A$ tel que $h_A \times_F G \cong \mathfrak{S}_{U_{(A,\rho)}}$, qui est isomorphe au sous-foncteur $(h_A)_{U_{(A,\rho)}}$ de h_A (cf. le corollaire VI-3.9). En particulier, ρ appartient à $G(A)$ si et seulement si $U_{(A,\rho)} = \operatorname{Spec} A$. En outre, pour tout corps $k \in \mathbf{Cps}$ et tout homomorphisme d'anneaux $f : A \to k$, le noyau de f est un point de $U_{(A,\rho)}$ si et seulement si $F(f)$ envoie ρ sur un élément de $G(k)$.

Soit U l'image canonique de $\mathrm{Rg}(G)$ dans $\mathrm{Rg}(F)$. Si A est un anneau dans $\mathbf{M}$ et si $\rho \in F(A)$, alors l'image canonique de $U_{(A,\rho)}$ dans $\mathrm{Rg}(F)$ est contenu dans $\mathrm{Rg}(G)$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est un point de $\operatorname{Spec} A$ dont l'image par $\mathrm{Rg}(\rho)$ appartient à $\mathrm{Rg}(G)$, où on considère ρ comme un morphisme de foncteurs de h_A dans F, alors il existe une extension k de $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ tel que $F(f)(\rho) \in G(k)$, où f désigne l'homomorphisme d'anneaux composé $A \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) \to k$. Cela montre que $\mathfrak{p}$ appartient à $U_{(A,\rho)}$. Ainsi $U_{(A,\rho)}$ s'identifie à l'image réciproque de U par l'application $\mathrm{Rg}(\rho) : \operatorname{Spec} A \to \mathrm{Rg}(F)$. Comme (A, ρ) est arbitraire, on obtient que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$.

Enfin, pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout $\rho \in F(A)$, d'après la proposition VI -3.7 on a $h_A \times_F F_U \cong (h_A)_{U_{(A,\rho)}}$ (où on considère le morphisme de foncteurs $h_A \to F$ correspondant à ρ). Cela montre que $\rho \in F_U(A)$ si et seulement si $U_{(A,\rho)} = \operatorname{Spec} A$. On obtient donc $F_U \cong G$. □

4. Topologie de Zariski-Grothendieck, faisceaux et schémas

On définit une base de topologie de Grothendieck sur la catégorie $\mathbf{M}^\circ$ comme suit. Pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$, soit $K_{\mathrm{Zar}}(A)$ l'ensemble des familles d'homomorphismes de la forme $(A \to A_i)_{i \in I}$ telles qu'il existe une famille $(s_i)_{i \in I}$ d'éléments de A qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) pour tout $i \in I$, A_i est isomorphe à A_{s_i} comme A-algèbres,

(2) A est engendré comme idéal de A par $(s_i)_{i \in I}$.

4.1. Proposition. *K_{Zar} est une base de topologie de Grothendieck sur $\mathbf{M}^\circ$.*

Démonstration. Soient A un anneau dans $\mathbf{M}$ et $R=(A\to A_i)_{i\in I}\in K_{\mathrm{Zar}}(A)$ et $(s_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A tel que $A=\sum_{i\in I}As_i$ et que $A_i\cong A[s_i^{-1}]$ comme A-algèbres pour tout $i\in I$. Soit $f:A\to B$ un morphisme dans $\mathbf{M}$. Pour tout $i\in I$, soit t_i l'image de s_i par f. On a alors $B=\sum_{i\in I}Bs_i$. L'élément $R'=(B\to B[t_i^{-1}])_{i\in I}$ appartient donc à $J_{\mathrm{Zar}}(B)$. De plus, pour tout $i\in I$, l'homomorphisme composé $A\to B\to B[t_i^{-1}]$ se factorise par $A[s_i^{-1}]$. J_{Zar} satisfait donc la condition (b') de base de topologie de Grothendieck.

Dans la suite, on montre que J_{Zar} satisfait la condition (c') de base de topologie de Grothendieck. Soient A un anneau dans $\mathbf{M}$ et $R=(A\to A_i)_{i\in I}\in K_{\mathrm{Zar}}(A)$ et $(s_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A tel que $A=\sum_{i\in I}As_i$ et que $A_i\cong A[s_i^{-1}]$ comme A-algèbres quel que soit $i\in I$. Pour tout $i\in I$, soit $(A_i\to A_{ij})_{j\in\Theta_i}$ un élément de $K_{\mathrm{Zar}}(A_i)$. On suppose que $A_{ij}\cong A_i[t_{ij}^{-1}]$, où $(t_{ij})_{j\in\Theta_i}$ est une famille d'éléments de A_i, qui engendrent A_i comme idéal de A_i. Comme A_i est isomorphe à la localisation de A par s_i, il existe une puissance de s_i dont le produit avec t_{ij} appartient à l'image canonique de A dans A_i. On désigne par s_{ij} l'élément de A dont l'image canonique dans A_i est égal à ce produit. Il s'avère que $A[s_{ij}^{-1}]$ est isomorphe à $A_i[t_{ij}^{-1}]$. En outre, comme A_i est engendré comme idéal de A_i par les t_{ij} $(j\in\Theta_j)$, il est aussi engendré par l'image canonique de $(s_{ij})_{j\in\Theta_j}$ puisque s_i est inversible dans A_i. Il existe alors un sous-ensemble fini Θ_i' de Θ_i, des éléments $a_{ij}\in A$, $j\in\Theta_i'$ et un entier N_i tel que

$$\sum_{j\in\Theta_i'}a_{ij}s_{ij}=s_i^{N_i}.$$

Enfin, comme $A=\sum_{i\in I}As_i$, on a $A=\sum_{i\in I}As_i^{N_i}$. Donc A est engendré par $(s_{ij})_{i\in I,\,j\in\Theta_i}$ comme idéal de A. On obtient donc que $(A\to A_{ij})_{i\in I,\,j\in\Theta_i}$ appartient à $K_{\mathrm{Zar}}(A)$. □

4.2. Définition. On désigne par J_{Zar} la topologie de Grothendieck sur $\mathbf{M}^\circ$ associée à la prétopologie de Grothendieck K_{Zar}, appelée *topologie de Zariski-Grothendieck*.

4.3. Remarque. Soit $F:\mathbf{M}\to\mathbf{Ens}$ un foncteur, considéré comme un préfaisceau d'ensembles sur $\mathbf{M}^\circ$. Il est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck si et seulement si, pour anneau $A\in\mathbf{M}$ et toute famille

$(s_i)_{i\in I}$ d'éléments de A, qui engendre A comme idéal de A, le diagramme

$$F(A)\longrightarrow\prod_{i\in I}F(A_{s_i})\overset{q_1}{\underset{q_2}{\rightrightarrows}}\prod_{(j,k)\in I^2}F(A_{s_js_k})$$

identifie $F(A)$ au noyau de (q_1,q_2), où q_1 et q_2 sont induit par les application canoniques

$$F(A_{s_j})\longrightarrow F(A_{s_js_k})\text{ et }F(A_{s_k})\longrightarrow F(A_{s_js_k})$$

respectivement. En effet, $A_{s_js_k}$ est isomorphe à $A_{s_j}\otimes_A A_{s_k}$ (cf. le lemme VI-1.36 (2)), qui est le produit fibré de A_{s_j} et A_{s_k} sur A dans la catégorie opposée $\mathbf{M}^\circ$.

Si F est de la forme $\mathfrak{S}_X$, où X est un espace localement annelé, alors F est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck. Cela revient au recollement de morphismes d'espaces localement annelés.

4.4. Proposition. *Soit $F:\mathbf{M}\to\mathbf{Ens}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) F est un faisceau sur $\mathbf{M}^\circ$ pour la topologie de Zariski-Grothendieck ;

(2) pour tout anneau A, le préfaisceau d'ensembles sur l'espace topologique $\operatorname{Spec}A$, qui envoie tout ouvert $U\subset\operatorname{Spec}A$ sur $\operatorname{Nat}(\mathfrak{S}_U,F)$, est un faisceau ;

(3) pour tout foncteur $G:\mathbf{M}\to\mathbf{Ens}$, le préfaisceau d'ensembles sur l'espace topologique $\operatorname{Rg}(G)$, qui envoie tout ouvert U de $\operatorname{Rg}(G)$ sur $\operatorname{Nat}(G_U,F)$, est un faisceau.

Démonstration. Compte tenu de la remarque VI-4.3, (1) est un cas particulier de (2). En effet, pour tout anneau A et tout $s\in A$, on a

$$\operatorname{Nat}(\mathfrak{S}_{D(s)},F)\cong\operatorname{Nat}(h_{A_s},F)\cong F(A_s).$$

(2) est un cas particulier de (3) car $(h_A)_U\cong\mathfrak{S}_U$ pour tout sous-ensemble ouvert U de $\operatorname{Spec}A$ (cf. le lemme VI-3.8).

Dans la suite, on démontre (1)$\Longrightarrow$(3). On écrite G comme une limite inductive de foncteurs représentables

$$G\cong\varinjlim_{(A,\rho)\in I_G^\circ}h_A.$$

D'après la proposition VI-3.10, pour tout sous-ensemble ouvert U de $\operatorname{Rg}(G)$ on a

$$G_U\cong\varinjlim_{(A,\rho)\in I_G^\circ}\mathfrak{S}_{\operatorname{Rg}(\rho)^{-1}(U)}.$$

On en déduit

$$\mathrm{Nat}(G_U, F) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_G} \mathrm{Nat}(\mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, F)$$

Comme $U \mapsto \mathrm{Nat}(\mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, F)$ est l'image directe du faisceau $V \mapsto \mathrm{Nat}(V, F)$ par l'application continue $\mathrm{Rg}(\rho)$, il est un faisceau. Enfin, la limite projective d'une famille de faisceaux est aussi un faisceau. □

4.5. Définition. Soit $F : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On désigne par $A(F)$ l'ensemble $\mathrm{Nat}(F, \mathbb{A}^1)$ des morphismes de foncteurs, où $\mathbb{A}^1 : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ est le foncteur d'oubli. L'ensemble $A(F)$ est canoniquement muni d'une structure d'anneaux. Les éléments de $A(F)$ sont appelés *fonctions régulière* sur F.

4.6. Proposition. *Soit $F : \mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On désigne par $\mathcal{O}_F$ le faisceau d'anneaux structurel de $\mathrm{Rg}(F)$. Alors pour tout ouvert U de $\mathrm{Rg}(F)$, l'anneau $\mathcal{O}_F(U)$ est canoniquement isomorphe à $A(F_U)$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{A}^1$ est un foncteur représentable, il est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck sur la catégorie $\mathbf{M}$, d'où le préfaisceau $U \mapsto A(F_U) \cong \mathrm{Nat}(F_U, \mathbb{A}^1)$ sur $\mathrm{Rg}(F)$ est un faisceau.

Supposons d'abord que le foncteur F est représentable par un anneau $B \in \mathbf{M}$. Pour tout élément $s \in B$, on a $F_{D(s)} \cong \operatorname{Spec} B_s$ et donc

$$\mathrm{Nat}(F_{D(s)}, \mathbb{A}^1) \cong B_s.$$

Cela montre que les faisceau $\mathcal{O}_F$ et $U \mapsto A(F_U)$ coïncident sur une base de topologie de $\mathrm{Rg}(F)$. Ils sont donc égaux.

On traite ensuit le cas général. On écrit F comme une limite inductive de foncteurs représentables

$$F \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \operatorname{Spec} A.$$

D'après la proposition VI-3.10, on a

$$F_U \cong \varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}.$$

On en déduit des isomorphismes fonctoriels

$$A(F_U) = \mathrm{Nat}(F_U, \mathbb{A}^1) \cong \mathrm{Nat}(\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F^\circ} \mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, \mathbb{A}^1)$$

$$\cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} \mathrm{Nat}(\mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)}, \mathbb{A}^1) \cong \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} \widetilde{A}(\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(U)) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Rg}(F)}(U).$$

□

4.7. Corollaire. *Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{Ens}$, et $\varphi : G \to F$ un morphisme de foncteurs. Si φ est une immersion ouverte, alors $\mathrm{Rg}(\varphi) : \mathrm{Rg}(G) \to \mathrm{Rg}(F)$ est une immersion ouverte d'espaces localement annelés.*

Démonstration. Nous avons vu dans la proposition VI-3.10 que $\mathrm{Rg}(\varphi)$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Rg}(G)$ dans un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$. La proposition VI-4.6 montre en outre que le faisceau d'anneaux sur $\mathrm{Rg}(G)$ s'identifie à la restriction de $\mathcal{O}_{\mathrm{Rg}(F)}$. □

4.8. Définition. Soient $F : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-foncteurs de F. On dit que $(F_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement* de F si, pour tout corps $k \in \mathrm{Cps}$, l'application canonique

$$\coprod_{i\in I} F_i(k) \to F(k)$$

est surjective. Si de plus les morphismes de foncteurs canoniques $F_i \to F$ sont des immersions ouvertes, on dit que $(F_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement ouvert* de F. On désigne par $\mathbf{Flr}$ la sous catégorie pleine de $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$ des faisceaux pour la topologie de Zariski-Grothendieck qui admet un recouvrement ouvert par des foncteur représentable.

On appelle *schéma* tout espace localement annelé qui est localement isomorphe au spectre premier d'un anneau dans $\mathbf{M}$. On désigne par $\mathbf{Sch}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ela}$ des schémas.

4.9. Lemme. *Soient $F : \mathbf{M} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur et $\varphi : G \to F$ une immersion ouverte. Si F admet un recouvrement ouvert par des foncteurs représentables, alors il en est de même de G.*

Démonstration. On commence par le cas où F est représentable par $A \in \mathbf{M}$. Dans ce cas-là il existe un ouvert U de $\mathrm{Spec}(A)$ tel que $G \cong F_U$. On peut trouver une famille $(s_i)_{i\in I}$ d'éléments de A de sorte que U soit recouvert par $(D(s_i))_{i\in I}$. Le foncteur F_U est recouvert par les immersions ouvertes

$$(F_U)_{D(s_i)} = F_{D(s_i)} \cong h_{A_{s_i}}, \quad i \in I.$$

On en déduit que G admet un recouvrement ouvert par des foncteurs représentables.

Traitons le cas général. Soit $(F_i \to F)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de F par des foncteurs représentables, où $F_i \cong h_{A_i}$. Alors il existe un sous-ensemble ouvert U_i de $\mathrm{Spec}(A_i)$ tel que $G \times_F F_i \cong (h_{A_i})_{U_i}$, qui admet un recouvrement ouvert par des foncteurs représentables. On en déduit que G admet aussi un recouvrement ouvert. □

4.10. Théorème.

(1) Pour tout schéma X, le morphisme canonique $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_X) \to X$ *est un isomorphisme.*

(2) Soit $F : \mathbf{M} \to \mathrm{Ens}$ *un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le foncteur F est un faisceau d'ensembles pour la topologie de Zariski-Grothendieck qui admet un recouvrement ouvert par des foncteurs représentables.

(b) L'espace localement annelé $\mathrm{Rg}(F)$ *est un schéma et le morphisme canonique de foncteurs* $F \to \mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(F)}$ *est un isomorphisme.*

(3) Le foncteur Rg *restreint à la catégorie* **Flr** *définit une équivalence de catégories entre* **Flr** *et la catégorie des schémas* **Sch**.

Démonstration. (1) On suppose que $(U_i)_{i\in I}$ est est un recouvrement ouvert de $\mathfrak{S}_X$ par des schémas affines. Pour tout $i \in I$, comme $\mathfrak{S}_{U_i}$ est un foncteur représentable, $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_{U_i})$ est canoniquement isomorphe à U_i et est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_X)$. Donc $\mathrm{Rg}(\mathfrak{S}_X) \cong X$.

(2) "(a)$\Longrightarrow$(b)" : Comme F est recouvert par des immersions ouvertes représentables, $\mathrm{Rg}(F)$ est localement isomorphe à un schéma affine, et donc est un schéma.

Comme F est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck, le préfaisceau d'ensembles sur $\mathrm{Rg}(F)$, qui envoie tout ouvert U sur

$$\mathrm{Nat}((\mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(F)})_U, F) = \mathrm{Nat}(\mathfrak{S}_U, F),$$

est un faisceau. Soit $(F_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert F par des foncteurs représentables. Pour tout i, soit U_i la réalisation géométrique de F_i. C'est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(F)$. On a $\mathfrak{S}_{U_i} \cong F_i \cong F_{U_i}$. Soit $\varphi_i : \mathfrak{S}_{U_i} \to F$ le morphisme de foncteurs induit par $F_i \to F$. Pour tout couple $(j,k) \in I^2$, $U_i \cap U_j$ admet un recouvrement ouvert par des schémas affines $U_{ij\alpha}$. Par recollement, on obtient l'inverse de $F \to \mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(F)}$.

"(b)$\Longrightarrow$(a)" est trivial.

(3) Soient F et G deux faisceaux localement représentables. On a

$$\mathrm{Nat}(F,G) \cong \mathrm{Nat}(F, \mathfrak{S}_{\mathrm{Rg}(G)}) \cong \mathbf{Ela}(\mathrm{Rg}(F), \mathrm{Rg}(G)).$$

□