Chapitre VII

Propriétés de schémas

Soient $\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{V}$ deux univers tels que $\mathbb{N} \in \mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{U}$. Soit $\mathbf{M}$ la catégorie des modèles de la théories des anneaux commutatifs et unifères dans $\mathfrak{U}_0$.

1. Généralités sur les morphisme de schémas

1.1. Définition. Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas. Si, pour tous morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, on a

$$\mathbb{P}(f) \text{ et } \mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(gf),$$

on dit que la propriété $\mathbb{P}$ est *stable par composition.*

Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas. On désigne par $\widetilde{\mathbb{P}}$ la propriété de morphisme de schémas comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X \xrightarrow{f} S) = \forall\, \varphi : T \to S,\ \mathbb{P}(f_T),$$

où $f_T : X \times_S T \to T$ est le morphisme universel (dit *obtenu de f par le changement de base $\varphi : T \to S$*).

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

La propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$ est appelée *version universelle* de la propriété $\mathbb{P}$. Si un morphisme de schémas vérifie la propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$, on dit qu'il vérifie *universellement* la propriété $\mathbb{P}$. Si les propriétés $\mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{P}}$ sont équivalentes, on dit que $\mathbb{P}$ est

stable par changement de base. Par définition, la version universelle d'une propriété est toujours stable par changement de base.

1.2. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas qui est stable par changement de base. Soient S un schéma et $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas. On suppose que le morphisme de schémas f satisfait la propriété $\mathbb{P}$. Pour tout morphisme $g : Z \to S$, le morphisme*

$$f \times_S 1_Z : X \times_S Z \to Y \times_S Z$$

satisfait aussi la propriété $\mathbb{P}$.

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \times_S Z \arrow[r, "f\times 1_Z"] \arrow[d] & Y \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

dont les carrés à droit et à l'extérieur sont cartésiens. D'après la proposition I-5.6(2), on obtient que le carré à gauche est cartésien. Comme la propriété $\mathbb{P}$ est stable par changement de base, on obtient que $\mathbb{P}(f) \Longrightarrow \mathbb{P}(f \times 1_Z)$.□

1.3. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas qui est stable par composition et par changement de base. Pour tout schéma S et tous morphismes de S-schémas $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$, si f et g satisfont la propriété $\mathbb{P}$, il en est de même de $f \times_S g : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{P}$ est stable par changement de base, d'après la proposition 1.2, les morphismes $f \times_S 1_Y : X \times_S Y \to X' \times_S Y$ et $1_{X'} \times_S g : X' \times_S Y \to X' \times_S Y'$ satisfont la propriété $\mathbb{P}$. Comme $\mathbb{P}$ est stable par composition, on en déduit que

$$f \times_S g = (1_{X'} \times_S g)(f \times_S 1_Y) : X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y'$$

satisfait la propriété $\mathbb{P}$. □

1.4. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas. On suppose que $\mathbb{P}$ est stable par composition. Soit $\widetilde{\mathbb{P}}$ la version universelle de la propriété $\mathbb{P}$. Alors la propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$ est aussi stable par composition.*

Démonstration. Soient X, Y et Z trois schémas et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes qui satisfont la propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$. Pour tout morphisme de schémas $\varphi : T \to Z$, les morphismes $f_{Y \times_Z T}$ et g_T satisfont la propriété $\mathbb{P}$ (car f et g satisfont la propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$). Comme $\mathbb{P}$ est stable par composition,

on obtient que $g_T f_T = (gf)_T$ satisfait la propriété $\mathbb{P}$, d'où gf satisfait la propriété $\widetilde{\mathbb{P}}$. $\square$

1.5. Définition. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On appelle *morphisme diagonal de* f l'unique morphisme de schémas $\Delta_f : X \to X \times_S X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Delta_f"] \arrow[drr, bend left, "1_X"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & & \\
& X \times_S X \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

Soient S un schéma et $\varphi : X \to Y$ un morphisme de S-schémas. On appelle *graph* de φ l'unique morphisme de schémas $\Gamma_\varphi : X \to X \times_S Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Gamma_\varphi"] \arrow[drr, bend left, "1_X"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Le morphisme diagonal d'un morphisme de schémas $f : X \to S$ pourrait être considéré comme le graphe du S-morphisme d'identité $1_X : X \to X$.

1.6. Proposition. *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux propriétés de morphisme de schémas telles que*

$$\mathbb{Q}(f) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\Delta_f)$$

pour tout morphisme de schémas f.

(1) Si la propriété $\mathbb{P}$ est stable par changement de base, la propriété $\mathbb{Q}$ l'est aussi.

(2) Si la propriété $\mathbb{P}$ est stable par changement de base et par composition, alors la propriété $\mathbb{Q}$ est aussi stable par changement de base et par composition.

(3) On suppose que $\mathbb{P}$ est stable par changement de base. Soient S un schéma, $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ deux S-schémas et $\varphi : X \to Y$ un S-morphisme. Si g satisfait la propriété $\mathbb{Q}$, alors Γ_φ satisfait la propriété $\mathbb{P}$.

Démonstration. (1) Soit $h : X \to S$ et $\eta : T \to S$ des morphismes de schémas. Le morphisme diagonal

$$\Delta_{h_T} : X \times_S T \longrightarrow (X \times_S T) \times_T (X \times_S T)$$

s'identifie à $\Delta_h \times_S 1_T$ si on considère l'isomorphisme

$$(X \times_S T) \times_T (X \times_S T) \cong (X \times_S X) \times_S T.$$

Si h satisfait la propriété $\mathbb{Q}$, alors Δ_h satisfait la propriété $\mathbb{P}$. Comme $\mathbb{P}$ est stable par changement de base, d'après la proposition VII-1.2 on obtient que $\Delta_h \times_S 1_T$ satisfait la propriété $\mathbb{P}$, d'où h_T satisfait la propriété $\mathbb{Q}$.

(2) Nous avons vu dans (1) que la propriété $\mathbb{Q}$ est stable par changement de base dès que $\mathbb{P}$ est stable par changement de base. Dans la suite, on montrera que $\mathbb{Q}$ est stable par composition en supposant que $\mathbb{P}$ est stable par composition et par changement de base.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes de schémas. Montrons que le carré suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & X \times_Z X \arrow[d, "f \times_Z f"] \\ Y \arrow[r, "\Delta_g"'] & Y \times_Z Y \end{tikzcd} \tag{VII.1}$$

où j est induit par les deux projection de $X \times_Y X$ dans X, et π est le morphisme structurel. En effet, si W est un schéma et si $(\varphi_1, \varphi_2)_Z : W \to X \times_Z X$ et $\psi : W \to Y$ sont deux morphismes de schémas tels que

$$(\psi, \psi)_Z = \Delta_g \psi = (f \times_Z f)(\varphi_1, \varphi_2)_Z = (f\varphi_1, f\varphi_2)_Z,$$

alors on a $f\varphi_1 = f\varphi_2 = \psi$ et donc il existe un unique morphisme $(\varphi_1, \varphi_2)_Y : W \to X \times_Y X$ tel que $\pi(\varphi_1, \varphi_2)_Y = \psi$ et que $j(\psi, \psi)_Y = (\psi, \psi)_Z$. Le carré (VII.1) est donc cartésien.

Si g est un morphisme qui satisfait la propriété $\mathbb{Q}$, alors Δ_g satisfait la propriété $\mathbb{P}$, et donc j satisfait la propriété $\mathbb{P}$ car $\mathbb{P}$ est stable par changement de base. Comme $\mathbb{P}$ est stable par composition, on en déduit que $\Delta_{gf} = j\Delta_f$ satisfait la propriété $\mathbb{P}$ dès que f satisfait la propriété $\mathbb{Q}$. Donc la propriété $\mathbb{Q}$ est stable par composition.

(3) Le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Gamma_\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\Delta_g"] \\ X \times_S Y \arrow[r, "\varphi \times_S 1_Y"'] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

En effet, si W est un schéma et si $\alpha : W \to Y$ et $\beta = (u, v)_S : W \to X \times_S Y$ sont deux morphismes tels que $(\varphi \times_S 1_Y)\beta = \Delta_g \alpha$, alors on a $\varphi u = \alpha = v$. On obtient donc $\Gamma_\varphi u = (u, v)_S$. Si $u' : W \to X$ est un autre morphisme tel que $\Gamma_\varphi u' = (u, v)_S$, alors on a nécessairement $u = u'$. Donc $u : W \to X$ est l'unique morphisme tel que $\varphi u = \alpha$ et $\Gamma_\varphi u = \beta$. Enfin, comme g satisfait la propriété $\mathbb{Q}$, on obtient que Δ_g satisfait la propriété $\mathbb{P}$, et donc Γ_φ satisfait la propriété $\mathbb{P}$ car $\mathbb{P}$ est stable par changement de base. □

2. Généralités sur les morphismes de foncteurs

2.1. Définition. Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de foncteurs dans $\mathbf{Fon}(\mathbf{M}, \mathbf{Ens})$. On dit que $\mathbb{P}$ est stable par composition si pour tous morphismes de foncteurs $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$, on a

$$\mathbb{P}(\varphi) \text{ et } \mathbb{P}(\psi) \Longrightarrow \mathbb{P}(\psi\varphi).$$

On dit que $\mathbb{P}$ est stable par changement de base si pour tous morphismes de foncteurs $f : F \to G$ et $g : H \to G$ on a

$$\mathbb{P}(f) \Longrightarrow \mathbb{P}(f_H),$$

où $f_H : F \times_G H \to H$ désigne le morphisme universel.

2.2. Proposition. *Soit $\mathbb{P}_0$ une propriété de morphisme de foncteurs. Soit $\mathbb{P}$ une autre propriété de morphisme de foncteurs telle que, pour tout morphisme de foncteurs $f : F \to G$, on a*

$$\mathbb{P}(f) \Longleftrightarrow \forall\, A \in \mathbf{M},\ \forall\, \rho \in G(A),\ \mathbb{P}_0(F \times_{G,\rho} h_A \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} h_A).$$

Alors la propriété $\mathbb{P}$ est stable par changement de base.

Démonstration. Soit $f : F \to G$ et $g : H \to G$ deux morphismes de foncteurs. Pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout $\rho \in H(A)$, on a

$$(F \otimes_G H) \otimes_{H,\rho} h_A \cong F \otimes_{G,\rho'} h_A,$$

où ρ' désigne l'image de ρ dans $G(A)$ par g_A. On obtient donc $\mathbb{P}(f) \Rightarrow \mathbb{P}(f_H)$. □

2.3. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de foncteurs.*

(1) Si $\mathbb{P}$ est stable par composition, alors sa version universelle est aussi stable par composition.

(2) On suppose que $\mathbb{P}$ est stable par changement de base. Soient G un foncteur, $\psi_1 : F_1 \to G$, $\psi_2 : F_2 \to G$ deux morphisme de foncteurs, et $f : F_1 \to F_2$ un morphisme de foncteurs tel que $\varphi_2 f = \varphi_1$. Pour tout

morphisme de foncteurs $\varphi : H \to G$, *on a*

$$\mathbb{P}(f) \Longrightarrow \mathbb{P}(f \times_G 1_H : F_1 \times_G H \to F_2 \times_G H).$$

(3) *On suppose que* $\mathbb{P}$ *est stable par changement de base et par composition. Pour tout foncteur* H *et tous morphismes de* H*-foncteurs* $f : F \to F'$ *et* $g : G \to G'$, *on a*

$$\mathbb{P}(f) \text{ et } \mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(f \times_H g : F \times_H G \to F' \times_H G').$$

(4) *Soit* $\mathbb{Q}$ *une propriété de morphisme de foncteurs telle que*

$$\mathbb{Q}(f) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\Delta_f).$$

(i) *Si* $\mathbb{P}$ *est stable par changement de base, alors* $\mathbb{Q}$ *est aussi stable par changement de base.*

(ii) *Si* $\mathbb{P}$ *est stable par changement de base et par composition, alors* $\mathbb{Q}$ *est aussi stable par changement de base et par composition.*

(iii) *On suppose que* $\mathbb{P}$ *est stable par changement de base. Soient* $f : F \to H$ *et* $g : G \to H$ *et* $\varphi : F \to G$ *des morphismes de foncteurs tels que* $f = g\varphi$. *Si* g *satisfait la propriété* $\mathbb{Q}$, *alors* Γ_φ *satisfait la propriété* $\mathbb{P}$.

3. Propriétés ensemblistes

3.1. Définition. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *injectif* (resp. *surjectif*) si, vu comme une application entre les espaces topologiques, f est injectif (resp. surjectif). On voit aussitôt que ces propriétés sont stables par composition.

3.2. Proposition. *La propriété de surjectivité est stable par changement de base.*

Démonstration. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas qui est surjectif. Soit $\varphi : T \to S$ un morphisme de schémas. Soient $t \in T$ et $s = \varphi(t)$. Comme f est surjectif, il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = s$. Soient $\kappa(x)$, $\kappa(s)$ et $\kappa(t)$ des corps résiduel des points x, s et t respectivement. Par les morphismes f et φ, on peut considérer $\kappa(x)$ et $\kappa(t)$ comme des extensions du corps $\kappa(s)$. On choisit une extension K de $\kappa(s)$ qui prolonge $\kappa(x)$ et $\kappa(t)$ en même temps. Les morphismes de schémas $\operatorname{Spec} K \to X$ et $\operatorname{Spec} K \to T$ correspondant aux morphismes de corps $\kappa(x) \to K$ et $\kappa(t) \to K$ induisent un unique morphisme $\operatorname{Spec} K \to X \times_S T$ tel que le diagramme suivant soit

commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[dr, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_S T \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
& T \arrow[r, "\varphi"'] & S
\end{tikzcd}$$

En particulier, l'image du morphisme $\operatorname{Spec} K \to X \times_S T$ fournit un point dont l'image par f_T donne $t \in T$. L'application f_T est donc surjectif. $\square$

Considérons maintenant la propriété d'injectivité. Il est claire que cette propriété est stable par composition. Cependant, cette condition n'est pas stable par changement de base, comme montré par l'exemple suivant.

3.3. Exemple. Soit $f : \operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ le morphisme de schémas correspondant au morphisme d'anneaux $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ensemblistement f est une bijection. On considère le changement de base de f par le même morphisme $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ donné par

$$f_{\mathbb{C}} : \operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C} \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C},$$

correspondant au morphisme d'anneaux

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z \otimes 1.$$

Le morphisme $f_{\mathbb{C}}$ admet deux sections, correspondant aux morphismes d'anneaux de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie $z \otimes w$ sur zw et sur $z\overline{w}$ respectivement. On en déduit que $\operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ admet deux points différent et que $f_{\mathbb{C}}$ ne peut pas être injectif.

3.4. Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *universellement injectif* si, pour tout morphisme de schémas $\varphi : T \to S$, le morphisme f_T induit de f par changement de base est injectif. D'après la proposition 1.4, on obtient que la propriété d'être universellement injectif est stable par composition et par changement de base.

3.5. Proposition. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est un morphisme universellement injectif;

(2) pour tout corps K, l'application $f(K) : X(K) \to Y(K)$ est injective;

(3) l'application f est injectif, et pour tout point $x \in X$, le morphisme de corps résiduel $\kappa(f(x)) \to \kappa(x)$ induit par f identifie $\kappa(x)$ à une extension purement inséparable de $\kappa(f(x))$.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Soit $P : \operatorname{Spec} K \to Y$ un point de Y à valeurs dans K. Comme f est universellement injectif, le morphisme

$$f_P : X \times_Y \operatorname{Spec} K \longrightarrow \operatorname{Spec} K$$

est injectif. Or, par la propriété universelle du produit fibré, l'ensemble des sections de f_P est en bijection avec l'ensemble des points de X à valeurs dans K qui sont envoyé sur P par l'application $f(K)$. On obtient donc qu'il existe au plus un élément de $X(K)$ dont l'image par $f(K)$ est P. L'application $f(K)$ est donc injective.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Montrons d'abord que f est injectif. Soient x_1 et x_2 deux points de X qui sont envoyés par f sur le même point $y \in Y$. Il existe un corps K extension de $\kappa(y)$ avec des morphismes $\kappa(y)$-linéaires de corps $\kappa(x_1) \to K$ et $\kappa(x_2) \to K$. Les morphisme de schémas de $\operatorname{Spec} K$ dans X correspondant à ces morphismes de corps sont envoyé par $f(K)$ sur le morphisme de schémas $\operatorname{Spec} K \to X$ correspondant au morphisme de corps $\kappa(y) \to K$. Comme $f(K)$ est injectif, ces morphismes de schémas sont identiques et leurs images sont la même. On obtient donc $x_1 = x_2$.

Soient x un point de X et $y = f(x)$. Si l'extension $\kappa(x)/\kappa(y)$ n'est pas purement inséparable, il existe une extension K de $\kappa(y)$ et deux morphismes $\kappa(y)$-linéaires distincts de $\kappa(x)$ dans K, qui induisent deux éléments distincts de $X(K)$ envoyés sur le même élément de $Y(K)$ (correspondant au morphisme de corps $\kappa(y) \to K$) par $f(K)$. Cela est absurde.

"(3)$\Longrightarrow$(2)" : Soient $P : \operatorname{Spec} K \to Y$ un point de Y à valeurs dans K, et $y \in Y$ l'image de l'unique point de $\operatorname{Spec} K$ par l'application P. On suppose que Q et Q' sont deux éléments de $X(K)$ qui sont envoyés sur P par $f(K)$. Comme f est une application injective, on obtient que les images de l'unique point de $\operatorname{Spec} K$ par Q et Q' sont égales. On désigne par x cette image. Soit $\varphi : \kappa(y) \to K$ le morphisme de corps correspondant à P. Comme l'extension $\kappa(x)/\kappa(y)$ est purement inséparable, il existe un unique morphisme de corps $\kappa(y)$-linéaire de $\kappa(x)$ dans K. On obtient donc que $Q = Q'$.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" : La condition (2) est stable par changement de base. Si $\varphi : Y' \to Y$ est un morphisme de schémas, pour tout corps K on a un diagramme cartésien dans la catégorie des ensembles

$$\begin{tikzcd}
(X \times_Y Y')(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_{Y'}(K)"'] & X(K) \arrow[d, "f(K)"] \\
Y'(K) \arrow[r, "\varphi(K)"'] & Y(K)
\end{tikzcd}$$

Comme $f(K)$ est injective, $f_{Y'}(K)$ l'est aussi. On en déduit que la condition (3) est aussi stable par changement de base, d'où f est universellement injectif. $\square$

3.6. Corollaire. *Soient A un anneau et S une famille multiplicative de A. Alors le morphisme de schéma* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *correspondant au morphisme d'anneaux canonique $A \to S^{-1}A$ est universellement injectif.*

4. Morphismes quasi-compacts

4.1. Définition. Soient X un espace topologique.

(1) Si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini, on dit que X est *quasi-compact*.

(2) Si X est non-vide et ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux sous-ensembles fermés strictement contenus dans X, on dit que X est *irréductible*.

Soit X un espace topologique. On désigne par $\mathrm{Irr}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X qui sont irréductibles par rapport à la topologie induite. On appelle *composante irréductible* tout élément de $\mathrm{Irr}(X)$ qui est maximal par rapport à la relation d'inclusion.

4.2. Proposition. *Soit X un espace topologique non-vide.*

(1) Si V est un sous-ensemble de X qui est irréductible, alors l'adhérence de V dans X est aussi irréductible.

(2) Si V est un sous-ensemble irréductible de X, alors il existe une composante irréductible de X qui contient V.

(3) L'espace X est recouvert par ses composantes irréductibles.

(4) Si X est irréductible, alors tout sous-ensemble ouvert non-vide de X est irréductible.

Démonstration. (1) On suppose que $\overline{V} = E \cup F$, où E et F sont des sous-ensembles fermés de X tels que $E \not\subset \overline{V}$ et $F \not\subset \overline{V}$. On a $E \cap V \neq V$ car sinon on aurait $E = \overline{V}$. De même $F \cap V \neq V$. Cependant $(E \cap V) \cup (F \cap V)$, ce qui contredit l'hypothèse que V est irréductible.

(2) Soit F un sous-ensemble irréductible de X. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties irréductibles de X contenant F. L'ensemble $\mathcal{A}$ est non-vide car $F \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}_0$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ qui est totalement ordonné par la relation d'inclusion, alors

$$M = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_0} H$$

est un élément de $\mathcal{A}$ (et donc est un majorant de $\mathcal{A}_0$). En effet, si on suppose par absurde qu'il existe deux sous-ensembles fermés E et F de M tel que $M = E \cup F$, alors pour tout $H \in \mathcal{A}_0$ on a $H \subset E$ ou $H \subset F$ (car $H \subset M$ et H est irréductible), et il existe deux éléments H_1 et H_2 de $\mathcal{A}_0$ tels

que $H_1 \not\subset E$ et $H_2 \not\subset F$ (car les inclusions $E \subset M$ et $F \subset M$ sont strictes). Cependant, ces conditions conduisent à $H_1 \subset F$ et $H_2 \subset E$. Cela contradit l'hypothèse que $\mathcal{A}_0$ est totalement ordonné. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{A}$ admet un élément maximal, qui est nécessairement un sous-espace fermé de X (d'après (1)). Il est une composante irréductible de X.

(3) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{x\}$ est irréductible, donc est contenu dans une composante irréductible de X.

(4) Soit U un ouvert non-vide de X. Si F_1 et F_2 sont deux sous-ensembles fermés tels que $(F_1 \cap U) \cup (F_2 \cap U) = U$, alors on a $(F_1 \cup U^c) \cup (F_2 \cup U^c) = X$. On obtient $F_1 \cup U^c = X$ ou $F_2 \cup U^c = X$. Donc $F_1 \supset U$ ou $F_2 \supset U$. □

4.3. Définition. Soient X un espace topologique et x un point de X. Si $\overline{\{x\}} = X$, on dit que x est un *point générique* de X. D'après la proposition précédente, si X admet un point générique, il est nécessairement irréductible.

4.4. Définition. Soit A un anneau. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $a^n = 0$. On appelle *nilradical* l'ensemble des éléments nilpotents de A.

4.5. Lemme. *Soient A un anneau et $\mathfrak{n}$ son nilradical. Alors $\mathfrak{n}$ est un idéal, qui est l'intersection des idéaux premiers de A.*

Démonstration. Soit a un élément nilpotent de A. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ tel que $a^n = 0$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors $a^n = 0 \in \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$.

Réciproquement, si a est un élément de A qui n'est pas nilpotent, on peut construire par le lemme de Zorn un idéal premier qui ne rencontre pas $S = \{a^n : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$. Soit Θ l'ensemble des idéaux de A ne rencontrant pas S. L'ensemble Θ est non-vide (car $\{0\} \in \Theta$) et est ordonné par la relation d'inclusion. Tout sous-ensemble totalement ordonné $\Theta_0 \subset \Theta$ admet un majorant, qui est $\{0\} \cup \bigcup_{\mathfrak{a} \in \Theta_0} \mathfrak{a}$. Par le lemme de Zorn on obtient l'existence d'un élément maximal $\mathfrak{p}$ de Θ. Si l'idéal $\mathfrak{p}$ n'était pas premier, alors il existerait x et y dans $A \setminus \mathfrak{p}$ tels que $xy \in \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est maximal dans Θ il existe deux entiers m et n, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ tels que $f^m \in \mathfrak{p} + (x)$ et $f^n \in \mathfrak{p} + (y)$. On en déduit

$$f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy) = \mathfrak{p},$$

ce qui conduit à une contradiction.

□

4.6. Proposition. *Soit A un anneau commutatif et unifère. Le spectre premier* $\operatorname{Spec} A$ *est un espace topologique quasi-compact. Il est irréductible*

si et seulement son nilradical est un idéal premier. Dans ce cas-là sont nilradical est l'unique point générique de $\operatorname{Spec} A$.

Démonstration. On a déjà vu le premier énoncé.

Soit $\mathfrak{n}$ le radical de A. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal premier, alors on a $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec} A$. En outre, $\overline{\{\mathfrak{n}\}} = V(\mathfrak{n}) = \operatorname{Spec} A$. Donc $\operatorname{Spec} A$ est irréductible.

Supposons que $\operatorname{Spec} A$ est irréductible. Si a et b sont deux éléments de A tels que $ab \in \mathfrak{n}$, alors on a $D(ab) = D(a) \cap D(b) = \varnothing$. Comme $\operatorname{Spec} A$ est irréductible, ou bien $D(a) = \varnothing$, ou bien $D(b) = \varnothing$. On en déduit $a \in \mathfrak{n}$ ou $b \in \mathfrak{n}$. Donc $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de $\operatorname{Spec} A$. En outre, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A différent de $\mathfrak{n}$ n'est pas un point générique car $\mathfrak{n}$ est strictement contenu dans $\mathfrak{p}$ et donc $\mathfrak{n} \notin V(\mathfrak{p})$. □

4.7. Corollaire. *Soit X un schéma. Tout sous-ensemble fermé irréductible de X admet un unique point générique.*

Démonstration. Soit F un sous-ensemble fermé irréductible de X. Soit U est un sous-ensemble ouvert affine de X tel que $U \cap F \neq \varnothing$. Alors $U \cap F$ est irréductible (cf. la proposition 4.2). Comme $U \cap F$ est le spectre premier d'un anneau, il contient un point générique x. On a $\overline{\{x\}} \cup (F \setminus U) = F$ et donc $\overline{\{x\}} = F$ car F est irréductible.

Si y est un autre point générique de F, alors on a $y \in U$ et donc y est un point générique de $U \cap F$. D'après la proposition 4.6, on obtient $y = x$. □

4.8. Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est *quasi-compact* si, pour tout sous-ensemble ouvert quasi-compact U de Y, le sous-ensemble ouvert $f^{-1}(U)$ de X est quasi-compact.

4.9. Lemme. *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Si, pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert affine U_s de s tel que $f^{-1}(U_s)$ soit quasi-compact, alors f est un morphisme quasi-compact.*

Démonstration. Soit V un sous-ensemble ouvert de S qui est quasi-compact. Pour tout $s \in U$, soit $\mathcal{O}(U_s)$ l'anneau du schéma affine U_s. Il existe un élément $a_s \in \mathcal{O}(U_s)$ tel que $D(a_s) \subset V \cap U_s$. Comme $f^{-1}(U_s)$ est un ouvert quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $W_{s,1}, \ldots, W_{s,n_s}$ d'anneaux $\mathcal{O}(W_{s,1}), \ldots, \mathcal{O}(W_{s,n_s})$ respectivement. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n_s\}$, le morphisme de schémas $f|_{W_{s,i}} : W_{s,i} \to U_s$ correspond à un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}(U_s) \to \mathcal{O}(W_{s,i})$, et l'intersection de $f^{-1}(D(a_s))$ avec $W_{s,i}$ est de la forme $D(b_{s,i})$, où $b_{s,i}$ désigne l'image de a_s dans $\mathcal{O}(W_{s,i})$ par le morphisme d'anneaux. On en déduit que $f^{-1}(D(a_s))$ est un sous-ensemble ouvert quasi-compact de X. Enfin, comme V est quasi-compact,

il est recouvert par un nombre fini d'ouvert de la forme $D(a_s)$, $s \in V$. Donc $f^{-1}(V)$ est un sous-ensemble ouvert quasi-compact de X. □

4.10. Proposition. *La propriété de quasi-compacité est une propriété stable par composition et par changement de base.*

Démonstration. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de schémas. On suppose que f et g sont des morphismes quasi-compacts. Si U est un sous-ensemble ouvert de Z qui est quasi-compact, alors $g^{-1}(U)$ est un sous-ensemble ouvert quasi-compact de Y, d'où $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$ est un sous-ensemble ouvert quasi-compact de X. Donc gf est un morphisme quasi-compact.

Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas quasi-compact et $\varphi : T \to S$ un morphisme. Montrons que $f_T : X \times_S T \to T$ est un morphisme quasi-compact, où f_T est le morphisme universel du produit fibré.

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

Soient t un point de T et V_t un voisinage ouvert affine de t tel que $\varphi(V_t)$ soit contenu dans un sous-ensemble ouvert affine U de S. On a

$$f_T^{-1}(V_t) = V_t \times_S X \cong V_t \times_U f^{-1}(U).$$

Pour tout sous-ensemble ouvert affine W de X contenu dans $f^{-1}(U)$, le schéma $V_t \times_U W$ est affine d'anneau $\mathcal{O}(V_t) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(W)$, donc est quasi-compact. En outre, comme f est quasi-compact, $f^{-1}(U)$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines. On en déduit que $f_T^{-1}(W)$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, donc est un ouvert quasi-compact. □

4.11. Définition. On dit que le morphisme f est *quasi-séparé* si Δ_f est un morphisme quasi-compact. On dit qu'un schéma X est quasi-séparé si le morphisme $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est quasi-compact.

4.12. Proposition. *La propriété de quasi-séparation est stable par composition et par changement de base.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propositions 1.6 et 4.10. □

4.13. Proposition. *Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) X est un schéma quasi-séparé ;

(2) l'intersection de deux sous-ensembles ouverts quasi-compacts de X est encore quasi-compacte ;

(3) il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts affines tel que, pour tout $(i,j)\in I^2$, l'intersection $X_i\cap X_j$ est quasi-compacte.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Soient U et V deux sous-ensembles ouverts quasi-compacts de X. Soient $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ des recouvrements de U et V par des ouverts affines, respectivement. Pour tout $(i,j)\in I\times J$, $U_i\times V_j$ est un sous-ensemble ouvert affine de $X\times Y$ et $(U_i\times V_j)_{(i,j)\in I\times J}$ forme un recouvrement ouvert de $U\times V$. Cela montre que $U\times V$ est quasi-compact, qui implique que $U\cap V=\Delta_X^{-1}(U\times V)$ est quasi-compact car X est quasi-séparé.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" est immédiat car tout schéma affine est quasi-compact.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : Soit W un sous-ensemble ouvert quasi-compact de $X\times X$. Alors W admet un recouvrement ouvert fini de la form $(U_i\times V_i)_{i\in I}$, où U_i et V_i sont des sous-ensembles ouverts affines de X. On en déduit que

$$\Delta_X^{-1}(W)=\bigcup_{i\in I}U_i\cap V_i$$

est un sous-ensemble ouvert quasi-compact de X. □

4.14. Corollaire. *Soit $f:X\to\operatorname{Spec}A$ un morphisme d'un schéma X vers un schéma affine. Si f est un morphisme quasi-séparé, alors X est un schéma quasi-séparé.*

Démonstration. Si U et V sont deux sous-ensemble ouvert affine de X, alors on a

$$U\cap V=\Delta_f^{-1}(U\times_{\operatorname{Spec}A}V).$$

On obtient donc que $U\cap V$ est quasi-compact. □

4.15. Lemme. *Soient A un anneau, X un schéma et $f:X\to\operatorname{Spec}A$ un morphisme. Soient en outre B une A-algèbre fidèlement plate, $X_B:=X\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}B$, et $\pi:X_B\to X$ le morphisme de projection. Si le morphisme f est quasi-compact et quasi-séparé, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent F, le morphisme canonique de B-modules*

$$B\otimes_A F(X)\longrightarrow\pi^*(F)(X_B)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Comme f est quasi-compact et quasi-séparé, on obtient que X est un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. Pour tout $(i,j)\in I^2$, $U_i\cap U_j$ est

quasi-compact, donc admet un recouvrement fini $(U_{ijk})_{k\in I_{ij}}$ par des ouverts affines. Soient $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ et $V_{ijk} = \pi^{-1}(U_{ijk})$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B\otimes_A F(X) \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} B\otimes_A F(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod\limits_{\substack{(i,j)\in I^2\\ k\in I_{ij}}} B\otimes_A F(U_{ijk}) \arrow[d] \\
\pi^*F(X_B) \arrow[r] & \prod\limits_{i\in I} \pi^*F(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{\substack{(i,j)\in I^2\\ k\in I_{ij}}} \pi^*F(U_{ijk})
\end{tikzcd}$$

Comme F et π^*F sont des faisceaux et comme B est une A-algèbre plate, on obtient que les lignes sont des égalisateurs. En outre, les flèches à droite et au milieu sont des isomorphismes. On en déduit que la flèche à gauche est aussi un isomorphisme. □

4.16. Théorème. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose que f est quasi-compact et quasi-séparé. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent F, l'image direct f_*F est un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent.*

Démonstration. Soit U un sous-ensemble ouvert affine de Y. Pour tout $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, l'homomorphisme canonique

$$(f_*F(U))_s \cong F(f^{-1}(U)) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{O}_X(U)_s \longrightarrow f_*(F)(D(s))$$

est un isomorphisme car la restriction de f à $f^{-1}(U)$ est un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de $f^{-1}(U)$ vers U. On obtient donc que $(f_*F)|_U$ est quasi-cohérent. □

4.17. Définition. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est un *morphisme ouvert* si pour tout sous-ensemble ouvert U de X, l'ensemble $f(U) \subset Y$ est ouvert. On dit que f est un *morphisme fermé* si pour tout sous-ensemble fermé M de X, l'ensemble $f(M) \subset Y$ est fermé. On dit que le morphisme f est *universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*) si pour tout morphisme $\varphi : Y' \to Y$, le changement de base $f_{Y'}$ de f est un morphisme ouvert (resp. fermé).

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est *dominant* si $f(X)$ est dense dans Y.

5. Morphismes affines

5.1. Définition. Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{Ens}$, et $f : F \to G$

un morphisme de foncteurs. On dit que f est un morphisme *schématique* si, pour tout faisceau H pour la topologie de Zariski-Grothendieck qui est localement représentable, le produit fibré $H \times_G F$ est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck qui est localement représentable. D'après la proposition 2.2, cette propriété est stable par changement de base. En outre, une immersion ouverte est un morphisme schématique.

5.2. Définition. Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{Ens}$, et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs. Si pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout $\rho \in G(A)$, le produit fibré $h_A \times_G F$ est un foncteur représentable, on dit que φ est un *morphisme affine*. D'après la proposition VII-2.2, on obtient que c'est une propriété stable par changement de base. En outre, tout morphisme affine est schématique.

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est *affine* si le morphisme de foncteurs correspondant $\mathfrak{S}_f : \mathfrak{S}_X \to \mathfrak{S}_Y$ est affine.

5.3. Proposition. *Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{Ens}$ et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs affine. Si G est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck qui est localement représentable, alors il en est de même de F.*

Démonstration. Soient A un anneau dans $\mathbf{M}$ et $(s_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A telle que $\sum_{i\in I} As_i = A$. On a une suite exacte

$$G(A) \xrightarrow{\beta} \prod_{i\in I} G(A_{s_i}) \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} G(A_{s_j s_k})$$

Montrons que la suite

$$F(A) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in I} F(A_{s_i}) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \textstyle\prod_{(j,k)\in I^2} F(A_{s_j s_k})$$

est exacte. Soit $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ un élément de $\prod_{i\in I} F(A_{s_i})$ tel que $p_1(\boldsymbol{x}) = p_2(\boldsymbol{x})$. Pour tout $i \in I$, soit y_i l'image de x_i par $\varphi_{A_{s_i}}$. Soit $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in I}$. On a $q_1(\boldsymbol{y}) = q_2(\boldsymbol{y})$. Il existe alors $\rho \in G(A)$ tel que $\beta(\rho) = \boldsymbol{y}$. Comme φ est un morphisme affine, le foncteur $F' = F \times_{G,\rho} h_A$ est représentable, donc un faiceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck. On a donc une suite exacte

$$F'(A) \xrightarrow{\alpha'} \prod_{i\in I} F'(A_{s_i}) \underset{p_2'}{\overset{p_1'}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} F'(A_{s_j s_k}) \ .$$

Pour tout $i \in I$, soit $\eta_i : A \to A_{s_i}$ le morphisme canonique. Vu comme un élément de $h_A(A_{s_i})$, l'image de η_i par $\rho_{A_{s_i}}$ est y_i. On obtient ainsi $(\eta_i, x_i) \in$

$F'(A_{s_i})$. Soit $\boldsymbol{x}' = ((\eta_i, x_i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F'(A_{s_i})$. On a $p'_1(\boldsymbol{x}') = p'_2(\boldsymbol{x}')$. Donc il existe $z \in F'(A)$ tel que $\alpha'(z) = \boldsymbol{x}'$. L'élément z est de la forme $(1_A, w)$, où $w \in F(A)$, et w est l'unique élément de $F(A)$ tel que $\alpha(w) = \boldsymbol{x}$.

Dans la suite, on montre que F admet un recouvrement ouvert par des foncteurs représentables. Soit $(\psi_j : h_{B_j} \to G)_{i\in J}$ un recouvrement ouvert de G par des foncteurs représentables. Comme φ est un morphisme affine, pour tout $j \in J$, le foncteur $h_{B_j} \times_G F$ est représentable. En outre, le morphisme de projection $\psi'_j : h_{B_j} \times_G F \to F$ est une immersion ouverte. Enfin, comme $(\psi_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de G, $(\psi'_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de F. □

5.4. Corollaire. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si f est un morphisme affine, alors il est quasi-compact.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Y par des schémas affines. Pour tout $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ est un sous-ensemble ouvert de X qui est un schéma affine (car le foncteur correspondant est représentable). Il est donc quasi-compact. □

5.5. Proposition. *Soit $\mathbb{P}_0$ une propriété de morphisme de schémas affines. Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de foncteurs. On suppose que tout morphisme de foncteurs vérifiant la propriété $\mathbb{P}$ est un morphisme affine et que, pour tout morphisme de foncteurs $f : F \to G$, on a*

$$\mathbb{P}(f) \Longleftrightarrow \forall\, A \in \mathbf{M},\ \forall\, \rho \in G(A),\ \mathbb{P}_0(F \times_{G,\rho} h_A \to h_A).$$

Si la propriété $\mathbb{P}_0$ est stable par composition, il en est de même de $\mathbb{P}$.

Démonstration. Soient $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$ des morphismes de foncteurs qui vérifient la propriété $\mathbb{P}$. Soient A un anneau et $\rho \in H(A)$. Comme ψ est un morphisme affine, le produit fibré $G \times_{H,\rho} h_A$ est représentable. Soient B l'anneau qui représente ce foncteur et $\lambda \in G(B)$ la première coordonnée de l'élément universel. Alors le morphisme $F \times_{H,\rho} h_A$ s'écrit comme le composé de $F \times_{G,\lambda} h_B \to h_B$ et $h_B \cong G \times_{H,\rho} h_A \to h_A$. On obtient donc que $\psi\varphi$ vérifie la propriété $\mathbb{P}$. □

5.6. Corollaire. *La propriété d'être affine est stable par composition.*

5.7. Proposition. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si, pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert affine V_y de y tel que $f^{-1}(V_y)$ soit un ouvert affine de X, alors f est un morphisme affine.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, si Y est un schéma affine d'anneau A, alors X l'est aussi. La condition de la proposition montre que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_Y$-algèbre quasi-cohérente. Soit B l'anneau des sections globales

de $\mathcal{O}_X$. On a un morphisme canonique $X \to \operatorname{Spec} B$ correspondant au morphisme d'identité $B \to \mathcal{O}_X(X)$. Ce morphisme devient un isomorphisme si on le restreindre à $f^{-1}(V_y)$. Par recollement on obtient que ce morphisme est un isomorphisme. □

5.8. Corollaire. *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Si $\varphi : Y \to S$ est un morphisme de schémas fidèlement plat et quasi-compact, tel que le morphisme de projection $f_Y : X \times_S Y \to Y$ soit affine, alors le morphisme f est affine.*

Démonstration. Par la proposition précédente, on se ramène au cas où S est un schéma affine. Montrons que X est un schéma affine. Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de Y par des ouverts affine, alors le morphisme canonique $\coprod_{i\in I} U_i \to Y$ est fidèlement plat et quasi-compact. On se ramène donc au cas où S, Y et $X \times_S Y$ sont affines, et $\varphi : Y \to S$ fidèlement plat.

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

Comme φ est un morphisme affine et surjectif, il en est de même de π. Soit $Z = X \times_S Y$. Comme Z est quasi-compact, on en déduit que X est quasi-compact. Il existe alors un recouvrement fini $(X_j)_{j\in J}$ de X par des ouverts affines. Comme $\pi^{-1}(X_j)$ est affine, on obtient que $\pi^{-1}(X_i \cap X_j) = \pi^{-1}(X_i) \times_Z \pi^{-1}(X_j)$ est affine, donc quasi-compact. On en déduit que X est quasi-compact et quasi-séparé. Par conséquent, on a

$$\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(Z).$$

□

5.9. Définition. Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs. On dit que φ est une *immersion fermée* si φ est affine et si, pour tout anneau $A \in \mathbf{M}$ et tout $\rho \in G(A)$, le morphisme $h_A \times_{G,\rho} F \to h_A$ correspond à un anneau quotient de A. D'après les propositions 5.5 et 2.2, on obtient que immersion fermée est une propriété stable par composition et par changement de base. Si φ est une immersion fermée, alors elle est un morphisme affine.

5.10. Proposition. *Soient B un anneau et B/I un anneau quotient de B, où I est un idéal de B. Alors le morphisme canonique $h_{B/I} \to h_B$ est une immersion fermée.*

Démonstration. Soit A un anneau et $\rho : h_A \to h_B$ un morphisme de foncteurs, qui correspond à un morphisme d'anneau $\varphi : B \to A$. Alors on a

$(B/I)\otimes_B A\cong A/\varphi(I)A$. Donc $h_{B/I}\times_{h_B} h_A$ est un foncteur représentable, qui correspond à l'anneau quotient $A/\varphi(I)A$. □

5.11. Proposition. *Soit $\varphi : F\to G$ un morphisme de foncteurs qui est une immersion fermée. Alors $\mathrm{Rg}(\varphi)$ définit un homéomorphisme entre $\mathrm{Rg}(F)$ et un sous-espace fermé de $\mathrm{Rg}(G)$.*

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Rg}(\varphi)$ est une application injective. Soient K un corps et $x\in G(K)$. Comme φ est une immersion fermée, on obtient que $h_K\times_G F$ est un foncteur représentable correspondant à un anneau quotient de K. En particulier, il existe au plus un élément de $F(K)$ qui est envoyé sur x par φ_K. Cela montre que l'application $\mathrm{Rg}(\varphi)$ est injective.

Soient A un anneau et $\rho\in G(A)$. Montrons que l'application

$$\mathrm{Rg}(F\times_{G,\rho} h_A)\longrightarrow \mathrm{Rg}(h_A)=\operatorname{Spec} A$$

définit une bijection entre $\mathrm{Rg}(F\times_{G,\rho} h_A)$ et $\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(\mathrm{Rg}(F))$, où on considère $\mathrm{Rg}(F)$ comme un sous-ensemble de $\mathrm{Rg}(G)$. Soient K un corps et (λ, f) un élément de $(F\times_{G,\rho} h_A)(K)$. Alors $\rho_K(f)=\varphi_K(\lambda)$.

Enfin, comme $F\times_{G,\rho} h_A$ est un foncteur représentable défini par un anneau quotient de A, on obtient que $\mathrm{Rg}(\rho)^{-1}(\mathrm{Rg}(F))$ est fermé pour tout (A,ρ). Donc $\mathrm{Rg}(F)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Rg}(G)$. □

5.12. Proposition. *Soient F, G et H trois foncteurs de* **M** *dans* **Ens**, *et $f : F\to G$ et $g : G\to H$ deux morphismes de foncteurs. On suppose que f est une immersion ouverte et que g est une immersion fermée. Alors il existe un foncteur G', une immersion ouverte $u : G'\to H$ et une immersion fermée $v : F\to G'$ telles que $gf=uv$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'image de $\mathrm{Rg}(gf)$ est un sous-ensemble ouvert de l'image de $\mathrm{Rg}(g)$, qui est un sous-ensemble ouvert de $\mathrm{Rg}(H)$. Il existe alors un sous-ensemble ouvert U de $\mathrm{Rg}(H)$ qui contient $\mathrm{Rg}(gf)$ et tel que $\mathrm{Rg}(gf)$ soit un sous-ensemble fermé de U. Soit $G'=H_U$ et $u : G'\to H$ l'immersion ouverte correspondante. Comme l'image de $\mathrm{Rg}(gf)$ est contenu dans U, on obtient que gf se factorise par $u : G'\to H$. Il existe alors un morphisme $v : F\to G'$ tel que $uv=gf$. Enfin, comme $F\cong F\times_H G'$, on obtient que v est une immersion fermée. □

5.13. Définition. Soit φ un morphisme de foncteurs. Si φ peut être écrit comme la composée d'une immersion ouverte et une immersion fermée, on dit que φ est une *immersion*. C'est une propriété stable par changement de base et par composition (voir la proposition précédente).

5.14. Corollaire. *La composition de deux immersions est encore une immersion.*

5.15. Définition. Soit f un morphisme de foncteurs. On dit que f est un morphisme *séparé* si Δ_f est une immersion fermée. C'est une propriété stable par changement de base et par composition. En outre, si un morphisme de schéma est séparé, il est nécessairement quasi-séparé.

5.16. Proposition. *Tout morphisme affine de foncteurs est séparé.*

Démonstration. Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme affine. Pour tout anneau A et tout $\rho \in G(A)$, le produit fibré $F \times_{G,\rho} h_A$ est représentable. On désigne par $\pi : F \times_G h_A \to h_A$ le morphisme de projection. Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ un élément de $(F \times_G F)(A)$ et ρ son image canonique dans $G(A)$. Soit B l'anneau qui représente le foncteur produit fibré $F \times_{G,\rho} h_A$. Le morphisme de projection $\mathrm{pr}_2 : h_B \cong F \times_{G,\rho} h_A \to h_A$ correspond à un morphisme d'anneaux $A \to B$. En outre, on a $h_B \times_{h_A} h_B \cong (F \times_G F) \times_{G,\rho} h_A$. Comme each élément de $F(A)$ dont l'image dans $G(A)$ s'identifie à ρ se relève de façon unique en un élément de $(F \times_{G,\rho} h_A)(A) \cong h_B(A)$, le morphisme (λ_1, λ_2) se factorise de façon unique par $h_B \times_{h_A} h_B$ par un morphisme $(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2) : h_A \to h_B \times_{h_A} h_B$, et le carré dans le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & h_B \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{pr}_2}"'] & F \arrow[d, "\Delta_\varphi"] \\
h_A \arrow[r, "(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2)"'] & h_B \times_{h_A} h_B \arrow[r] & F \times_G F
\end{tikzcd}$$

Comme Δ_{pr_2} est une immersion fermée (correspondant au morphisme surjectif $B \otimes_A B \to B$ qui envoie $b \otimes b'$ sur bb'), on obtient que $h_A \times_{F \times_G F} F \to h_A$ est induit par un anneau quotient de A. Le morphisme Δ_φ est donc une immersion fermée. □

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On suppose que f est un morphisme affine. Si E est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, alors $f_*(E)$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. En particulier, $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente. La correspondance qui associe X à $f_*(\mathcal{O}_X)$ définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-schémas affines et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente.

5.17. Proposition. *Soient S un schéma, X et Y deux S-schémas, et $f : X \to Y$ un S-morphisme. Alors le morphisme de graphe $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$ est une immersion. Si le morphisme structurel $Y \to S$ est séparé, alors Γ_f est une immersion fermée.*

Démonstration. D'après la proposition 1.6, il suffit de montrer que $\Delta_{Y/S}: Y \to Y \times_S Y$ est une immersion. Soit $g: Y \to S$ le morphisme structurel. Soient U et V des ouverts affines de Y et S respectivement, tels que $g(U) \subset V$. On a alors $\Delta^{-1}(U \times_V U) = U$. Cela montre que la restriction de g à U est une immersion fermée de U dans $U \times_V U$.

Le deuxième énoncé résulte de la proposition 1.6. □

5.18. Remarque. On obtient de la proposition VII-2.3 que la propriété d'être séparé est stable par composition et par changement de base. En outre, toute immersion ouverte $i: U \to X$ est séparé car sont morphisme diagonal s'identifie au morphisme d'identité. On en déduit que toute immersion est séparée.

5.19. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme schémas. Si,*

(i) pour tout schéma X, le morphisme d'identité 1_X satisfait la propriété $\mathbb{P}$,

(ii) pour tous morphisme de schémas g et j tels que gj soit bien défini et que j soit une immersion, on a

$$\mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(gj),$$

(iii) pour tout schéma S et tous morphismes de S-schémas f et g, on a

$$\mathbb{P}(f) \text{ et } \mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(f \times_S g),$$

alors, pour tout morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, on a

$$\mathbb{P}(gf) \Longrightarrow \mathbb{P}(f).$$

Démonstration. On a $f = (gf \times_Z 1_Y)\Gamma_f$. □

Démonstration. Les propriétés suivantes s'applique à la proposition au-dessus : immersion, morphisme universellement injectif, morphisme séparé, morphisme de type fini, morphisme de présentation finie. □

5.20. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas. Si pour tous morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ on a*

$$\mathbb{P}(gf) \Longrightarrow \mathbb{P}(f).$$

Alors, pour tout schéma S et tout morphisme de S-schémas $u: X \to Y$ et $v: X \to Z$, on a

$$\mathbb{P}(u) \Longrightarrow \mathbb{P}((u,v)_S),$$

où $(u,v)_S: X \to Y \times_S Z$ est le morphisme déterminé par u et v.

Démonstration. Soit $p : Y \times_S Z \to Y$ le morphisme de projection. On a $u = p(u, v)_S$. □

5.21. Proposition. *Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de schémas. On suppose que*

(i) Tout morphisme d'identité satisfait la propriété $\mathbb{P}$,

(ii) pour toute immersion fermée $j : X \to Y$ et tout morphisme de schémas $g : Y \to Z$, on a

$$\mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(gj),$$

(iii) pour tout schéma S et tous morphismes de S-schémas $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$, on a

$$\mathbb{P}(f) \text{ et } \mathbb{P}(g) \Longrightarrow \mathbb{P}(f \times_S g).$$

(1) Pour tous morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ où g est séparé, on a

$$\mathbb{P}(gf) \Longrightarrow \mathbb{P}(f).$$

(2) Si

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de morphismes de schémas, où i et j sont des immersions fermées, alors

$$\mathbb{P}(f) \Longrightarrow \mathbb{P}(f').$$

Démonstration. (1) On a $f = (gf \times_Z 1_Y)\Gamma_f$. Comme g est séparé, le morphisme Γ_f est une immersion fermée.

(2) D'après (1), on obtient que $fi = jf'$ satisfait la condition $\mathbb{P}$. Comme toute immersion fermée est séparée, on obtient que f' satisfait la propriété $\mathbb{P}$. □

5.22. Remarque. La proposition précédente s'applique aux propriétés suivantes : immersion fermée, morphisme affine, morphisme séparé, morphisme quasi-compact, morphisme quasi-séparé, morphisme universellement fermé, morphisme universellement injectif.

6. Condition de finitude

6.1. Lemme. *Soient k un anneau, A une k-algèbre et M un k-module.*

(1) Si M est un k-module de type fini (resp. de présentation finie), alors $A \otimes_k M$ est un A-module de type fini (resp. de présentation finie).

(2) On suppose que A est une k-algèbre fidèlement plat. Si $A \otimes_k M$ est un A-module de type fini (resp. de présentation finie).

Démonstration. Si M est un k-module de type fini, alors il existe un entier $n \geqslant 0$ et un épimorphisme $\varphi : k^n \to M$. Comme le foncteur de produit tensoriel $A \otimes_k -$ est exact à droite, le morphisme $1_A \otimes \varphi : A \otimes_k k^n \cong A^n \to A \otimes_k M$ est un épimorphisme. Donc $A \otimes_k M$ est un A-module de type fini. Similairement, si M est un k-module de présentation finie, alors il existe des entiers naturels n et m, ainsi qu'une suite exacte

$$k^n \longrightarrow k^m \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exact

$$A^n \longrightarrow A^m \longrightarrow A \otimes_k M \longrightarrow 0.$$

Donc $A \otimes_k M$ est un A-module de présentation finie. □

6.2. Définition. Soit k un anneau. On appelle k-algèbre *de type fini* tout anneau quotient d'un anneau de polynôme à un nombre fini de variables. Soit A une k-algèbre de type fini. S'il existe un entier $n \geqslant 0$ et un morphisme de k-algèbre $k[T_1, \ldots, T_n] \to A$ dont le noyau est un idéal de type fini de l'anneau de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$, on dit que A est une k-algèbre de présentation finie.

Comme le produit tensoriel préserve les conoyaux, on obtient que, si A est une k-algèbre de type fini (resp. de présentation finie) et si B est une k-algèbre, alors $B \otimes_k A$ est une B-algèbre de type fini (resp. de présentation finie).

6.3. Définition. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert affine U de x et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tel que $f(U) \subset V$ et que le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ défini par f munit $\mathcal{O}(U)$ d'une structure de $\mathcal{O}(V)$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie), on dit que le morphisme f est localement de type fini (resp. localement de présentation finie). Si de plus le morphisme f est quasi-compact, on dit que f est de type fini (resp. de présentation finie).

6.4. Lemme. *Soient I une catégorie filtrante, $(k_i)_{i \in I}$ un foncteur de I dans la catégorie des anneaux et k la limite inductive de $(k_i)_{i \in I}$. Si A est une k-algèbre de présentation finie, alors il existe $i \in I$ est une k_i-algèbre de présentation finie telle que $A \cong k \otimes_{k_i} A_i$*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : k[T_1, \dots, T_n] \to A$ un épimorphisme de k-algèbres dont le noyau $\mathfrak{a}$ est engendré par les polynômes $P_0, \dots, P_m$, où $m \in \mathbb{N}$. Soit $i \in I$ tel que l'image de k_i dans k contient tous les coefficients des polynômes $P_0, \dots, P_m$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, soit Q_j un polynôme dans $k_i[T_1, \dots, T_n]$ dont l'image canonique dans $k[T_1, \dots, T_n]$ est P_j. Soient $\mathfrak{a}_i$ l'idéal de $k_i[T_1, \dots, T_n]$ engendré par $Q_0, \dots, Q_m$ et $B_i := k_i[T_1, \dots, T_n]$. Alors B_i est une k_i-algèbre de présentation finie et $B \cong k \otimes_{k_i} B_i$. □

6.5. Proposition. *Soit k un anneau.*

(1) Si A est une k-algèbre de présentation finie, alors il existe une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini k_0 de k et une k_0-algèbre de présentation finie A_0 telles que $A \cong k \otimes_{k_0} A_0$.

(2) Si A est une k-algèbre de présentation finie et si B est une A-algèbre de présentation finie, alors B est une k-algèbre de présentation finie.

(3) Si A et B sont des k-algèbre de présentation finie et si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres, alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un idéal de type fini de A.

Démonstration. (1) On peut écrire k comme la limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini. L'énoncé découle donc du lemme précédent.

(2) D'après (1), il existe une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini k_0 de k et une k_0-algèbre de présentation finie A_0 telles que $A \cong k \otimes_{k_0} A_0$. On écrit A comme la limite inductive de ses sous-A_0-algèbre de type fini. Par le lemme précédent, il existe une sous-A_0-algèbre de type fini A_1 de A et une A_1-algèbre de présentation finie B_1 telles que $B \cong A \otimes_{A_1} B_1$. Comme k_0 est un anneau noethérien et B_1 est une k_0-algèbre de type fini, on obtient que B_1 est une k_0-algèbre de présentation finie. On en déduit que $B \cong k \otimes_{k_0} B_1$ est une k-algèbre de présentation finie.

(3) Soit k_0 une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini de k et B_0 une k_0-algèbre de présentation finie telles que $B \cong k \otimes_{k_0} B_0$. On suppose que $\pi : k[T_1, \dots, T_n] \to B$ est un épimorphisme de k-algèbres, dont le noyau $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini. Quitte à élargir k_0, on peut supposer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $x_i \in B_0$ tel que $1 \otimes x_i$ correspond à $\varphi(\pi(T_i))$ dans l'isomorphisme $k \otimes_{k_0} B_0 \to B$. Soit $(y_j)_{j=1}^m$ une famille finie de générateurs de B_0 comme k_0-algèbres. Comme φ est un épimorphisme, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe $P_j \in A[T_1, \dots, T_n]$ tel que

$$1 \otimes y_j = P_j(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n)$$

dans $k \otimes_{k_0} B_0 \cong B$. Soit k_1 une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini de k, qui contient k_0 et tous les coefficients de P_j. Soit $B_1 = k_1 \otimes_{k_0} B_0$. On a alors $B \cong k \otimes_{k_1}$

B_1. Quitte à remplacer k_0 par k_1 et B_0 par B_1, on peut supposer que

$$y_j = P_j(x_1, \dots, x_n) \in B_0.$$

Enfin comme $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini, quitte à rajouter encore dans k_0 les coefficients d'une famille finie de générateur de cet idéal, obtient l'existence d'une algèbre quotient A_0 de $k_0[T_1, \dots, T_n]$ telle que $A \cong k \otimes_{k_0} A_0$ et qu'il existe un épimorphisme $\varphi_0 : A_0 \to B_0$ (qui envoie la classe de T_i sur x_i) avec $\varphi \cong 1_k \otimes \varphi_0$. Comme le noyau de φ est l'image canonique de $k \otimes_{k_0} \operatorname{Ker}(\varphi_0)$ dans A et comme $\operatorname{Ker}(\varphi_0)$ est un idéal de type fini de A_0 car A_0 est noethérien, on obtient que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un idéal de type fini.

□

6.6. Proposition. *Soient k un anneau, A et B deux k-algèbres. On suppose que B est fidèlement plate. Si $B \otimes_k A$ est une B-algèbre de type fini (resp. de présentation finie), alors A est une k-algèbre de type fini (resp. de présentation finie).*

Démonstration.

Soit $\mathscr{A}$ la famille des sous-algèbres de type fini de A ordonnée par la relation d'inclusion et considérée comme une catégorie petite. On a

$$A \cong \varinjlim_{A' \in \mathscr{A}} A',$$

et donc

$$B \otimes_k A \cong \varinjlim_{A' \in \mathscr{A}} B \otimes_k A'.$$

Si $B \otimes_k A$ est une B-algèbre de type fini, alors il existe un $A' \in \mathscr{A}$ tel que le morphisme canonique $B \otimes_k A' \to B \otimes_k A$ soit un isomorphisme. On en déduit que le morphisme d'inclusion $A' \to A$ est un isomorphisme car B est une k-algèbre fidèlement plate.

Si $B \otimes_k A$ est une B-algèbre de présentation finie, alors elle est une B-algèbre de type fini et donc A est une k-algèbre de type fini. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ est un épimorphisme de k-algèbres

$$\varphi : k[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow A.$$

Soit $\mathfrak{a}$ le noyau de φ. Comme B est une k-algèbre plate, $B \otimes_k \mathfrak{a}$ est le noyau de

$$1_B \otimes \varphi : B \otimes_k k[T_1, \dots, T_n] \cong B[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow B \otimes_k A,$$

qui est un idéal de type fini de $B[T_1, \dots, T_n]$. Donc $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de $k[T_1, \dots, T_n]$ (car B est fidèlement plate). □

6.7. Proposition. *Soient k un anneau, A une k-algèbre et $(s_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de A telle que $\sum_{i\in I} As_i = A$. Si, pour tout $i \in I$, l'anneau local A_{s_i} est une k-algèbre de type fini (resp. de présentation finie), alors A est une k-algèbre de type fini (resp. de présentation finie).*

Démonstration. Soient $(a_i)_{i\in I}$ des éléments de A tels que $\sum_{i\in I} a_i s_i = 1$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble ordonné des sous-k-algèbres de type fini de A contenant $\{a_i,\, x_i \,|\, i \in I\}$. On a

$$A \cong \varinjlim_{A'\in\mathscr{A}} A'$$

et donc

$$A_{s_i} \cong \varinjlim_{A'\in\mathscr{A}} A'_{s_i}$$

pour tout $i \in I$. Comme les A_{s_i} sont des k-algèbre de type fini, il existe donc un sous-k-algèbre de type fini A' de A tel que $A'_{s_i} = A_{s_i}$ pour tout $i \in I$. On en déduit

$$\prod_{i\in I} A'_{s_i} = \prod_{i\in I} A_{s_i} = \prod_{i\in I} A \otimes_{A'} A'_{s_i} \cong A \otimes_{A'} \prod_{i\in I} A'_{s_i}.$$

Comme $\prod_{i\in I} A'_{s_i}$ est une A'-algèbre fidèlement plate, on en déduit que A est une A'-algèbre de type fini, et donc une k-algèbre de type fini.

On suppose en plus que A est une k-algèbre de présentation finie et que $\pi : k[T_1, \dots, T_n] \to A$ est un épimorphisme de k-algèbre. Soit $\mathfrak{a}$ le noyau de π. Pour tout $i \in I$, soient P_i et Q_i des éléments de $k[T_1, \dots, T_n]$ tels que $\pi(P_i) = a_i$ et $\pi(Q_i) = s_i$. Soit $\mathfrak{a}'$ l'idéal principal de $k[T_1, \dots, T_n]$ engendré par $1 - \sum_{i\in I} P_i Q_i$. On a $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}$. Soit B l'anneau quotient $k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}'$. Pour tout $i \in I$, B_{P_i} est une k-algèbre de présentation finie. Par conséquent, le noyau du morphisme canonique $B_{P_i} \to A_{s_i}$, qui est $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}')_{P_i}$, est un idéal de type fini de B_{P_i} (proposition 6.5 (3)). On en déduit que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ est un B-module de type fini et donc $\mathfrak{a}$ est un $k[T_1, \dots, T_n]$-module de type fini.□

6.8. Proposition. *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et $f = \operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme de schémas correspondant à φ. Le morphisme f est de type fini (resp. de présentation finie) si et seulement si B est une A-algèbre de type fini (resp. de présentation finie).*

Démonstration. La suffisance est triviale. Dans la suite, on démontre la nécessité. Pour tout $x \in \operatorname{Spec} B$, il existe un voisinage ouvert affine U et un voisinage ouvert affine V de $f(x) \in \operatorname{Spec} A$ tels que $f(U) \subset V$ et que $\mathcal{O}(U)$ soit un $\mathcal{O}(V)$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie). Soit $s \in \mathcal{O}(V)$ tel que $f(x) \in D(s) \subset V$. Le schéma $f^{-1}(D(s))$ est affine d'anneau $\mathcal{O}(U)_{\varphi(s)}$. Cet anneau est une $\mathcal{O}(V)$-algèbre de type fini (resp. de

présentation finie), et donc un $\mathcal{O}(V)_s = A_s$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie). Comme A_s est une A-algèbre de présentation finie, on en déduit que $\mathcal{O}(U)_s$ est une A-algèbre de type fini (resp. de présentation finie). D'après la proposition 6.7, on obtient que B est une A-algèbre de type fini (resp. de présentation finie). □

6.9. Définition. Soit X un schéma. Si X admet un recouvrement par des ouverts affines d'anneaux noethérien, on dit que X est *localement noethérien*. Si de plus X est quasi-compact, on dit que X est un schéma noethérien.

6.10. Proposition. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, où A est un anneau. Si X est un schéma noethérien, alors A est un anneau noethérien.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines, où les anneaux $\mathcal{O}(U_i)$ sont noethérien. Soit $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de A. Pour tout $i \in I$, la suite d'idéaux quasi-cohérent $(\widetilde{\mathfrak{a}}_n|_{U_i})_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. On en déduit que la suite $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi stationnaire. □

6.11. Définition. Soit X un espace topologique. Si toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire, on dit que l'espace topologique X est noethérien. Si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x qui est noethérien, on dit que X est *localement noethérien*.

6.12. Proposition. *Soit X un espace topologique.*

(1) X est noethérien si et seulement s'il est localement noethérien et quasi-compact.

(2) Si X est noethérien, alors il n'admet qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

Démonstration. (1) "$\Longrightarrow$" : Il suffit de montrer que, si X est noethérien, alors il est quasi-compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Ω. On suppose qu'il n'admet pas de sous-recouvrement fini. Par récurrence on peut soustraire une suite $(U_{i_n})_{n\geqslant 1}$ telle que $(\bigcup_{n\leqslant N} U_{i_n})_{N\geqslant 1}$ soit une suite strictement croissante. Cela contredit l'hypothèse de noethérienité.

"$\Longleftarrow$" : On suppose que X est localement noethérien et quasi-compact. Soit $(V_j)_{j\in I}$ est un recouvrement fini de X par des sous-espaces noethériens. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de X. Pour tout $j \in J$, la suite $(K_n \cap V_j)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Comme J est un ensemble fini, on en déduit que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi stationnaire.

(2) Soit Θ l'ensemble de sous-espaces fermés de X qui admet un nombre infini de composantes irréductibles. Si Y et Y' sont deux éléments de Θ, on a $Y \cap Y' \in \Theta$. Comme X est un espace noethérien, si Θ_0 est un sous-ensemble de Θ qui est non-vide et totalement ordonné, il admet un élément minimal. Par le lemme de Zorn, on obtient que Θ admet un élément minimal V, pourvu qu'il n'est pas non-vide. Par définition, V n'est pas irréductible. Donc il peut s'écrire comme la réunion de deux parties fermées V_1 et V_2 strictement contenu dans V. Les espaces V_1 and V_2 n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles, donc il en est de même de V. Cela conduit à une contradiction. □

7. Critère valuatif

Soit K un corps. Une valuation (non-archimédienne) de K à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné $(\Gamma, +)$ est par définition un morphisme de groupes $v : K^\times \to \Gamma$ telle que $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$ pour tout couple $(x, y) \in (K^\times)^2$ tel que $x + y \neq 0$.

7.1. Définition. Soient A un anneau intègre et K le corps des fractions de A. Si, pour tout élément $a \in K \setminus A$, on a $a^{-1} \in A$, on dit que A est un anneau de valuation. Si de plus A est un anneau noethérien, on dit que A est un anneau de valuation discrète.

7.2. Proposition. *Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une valuation v de K dans un groupe abélien totalement ordonné Γ tel que $R = \{x \in K^\times \mid v(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$.

(2) R est un anneau de valuation.

(3) L'ensemble des idéaux principaux de R est totalement ordonné par la relation d'inclusion.

(4) L'ensemble des idéaux de R est totalement ordonné par la relation d'inclusion.

(5) R est un anneau local et tout idéal de type fini de R est principal.

(6) R est un anneau local et tout sous-R-module de type fini de K est monogène.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Si $x \in K \setminus R$, alors $v(x) < 0$ et donc $v(x^{-1}) \geqslant 0$. Cela montre que $x^{-1} \in R$.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" : Soit $\Gamma = K^\times / R^\times$. Ce groupe est ordonné par la relation suivante $[x] \leqslant [y]$ si et seulement si $x^{-1}y \in (R \setminus \{0\})/R^\times$. Il est totalement ordonné lorsque R est un anneau de valuation.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des idéaux principaux de R et $(R\setminus\{0\})/R^\times$, qui préserve les relations d'ordre.

"(3)$\Longrightarrow$(4)" : Soient I et J des idéaux de R tel que $I\not\subset J$. Soit $a\in I\setminus J$. Pour tout $b\in J$, on a $(a)\not\subset(b)$ et donc $(b)\subset(a)$. Cela montre que $J\subset I$.

"(4)$\Longrightarrow$(5)" : Comme les idéaux de R sont totalement ordonnés, R admet une unique idéal maximal, donc est un anneau local. Si I est un idéal engendré par deux éléments a et b. Comme $(a)\subset(b)$ ou $(b)\subset(a)$, on obtient que $I=(a)$ ou $I=(b)$.

"(5)$\Longrightarrow$(6)" : Soit M un sous-R-module de type fini de K. Il existe alors un élément $a\in R\setminus\{0\}$ tel que aM soit un idéal de type fini de R. Ainsi aM est un idéal principal de R et donc M est monogène.

"(6)$\Longrightarrow$(2)" : Soient $a\in K^\times$ et $b=a^{-1}$. Soit M le sous-R-module de K engendré par b et 1. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Comme M est monogène, $M/\mathfrak{m}M$ est un espace vectoriel de rang 1 sur $R/\mathfrak{m}$. En particulier, il existe α et β dans R tels que $\alpha b+\beta\in\mathfrak{m}M$ et que $(\alpha,\beta)\notin\mathfrak{m}^2$. Il existe x et y dans $\mathfrak{m}$ tels que

$$\alpha b+\beta=xb+y,$$

ou de façon équivalent

$$\alpha+\beta a=x+ya.$$

Ou bien on a $\alpha-x\in R^\times$, ou bien on a $\beta-y\in R^\times$. On en déduit que, ou bien $b\in R$, ou bien $a\in R$. □

7.3. Définition. Soient R et R' deux sous-anneaux locaux d'un corps K. On dit que R' *domine* R si $R\subset R'$ et si l'application d'inclusion $R\to R'$ est un morphisme local.

7.4. Proposition. *Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) R est un anneau de valuation.

(2) R est un anneau local, qui est maximal parmi les sous-anneaux locaux de K pour la relation de domination.

(3) Il existe un anneau algébriquement clos L et un morphisme d'anneaux $\theta:R\to L$ tel que si R' est un sous-anneau de K contenant R et si θ se prolonge en un morphisme d'anneaux de R' dans L, alors $R=R'$.

Démonstration. "(1)$\Longrightarrow$(2)" : On suppose que R est un anneau de valuation contenu dans un sous-anneau local R' de K. Si cette inclusion est stricte, il existe $x\in R'\setminus R$, d'où $x^{-1}\in R\subset R'$. On obtient donc que x est inversible dans R'. Cependant x^{-1} n'est pas un élément inversible de R. Cela montre que l'application d'inclusion $R\to R'$ n'est pas local.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Soient k le corps résiduel de R et L une clôture algébrique de k. On prend $\theta : R \to L$ comme le morphisme composé $R \to k \to L$. Si R' est un sous-anneau de K contenant R tel que θ se prolonge en un morphisme d'anneaux $\theta' : R' \to L$. Soit $\mathfrak{m}'$ le noyau de θ' et R'' la localisation de R' par rapport à $\mathfrak{m}'$. Quitte à remplacer R' par R'' on peut supposer R' local. Ainsi R' domine R. On obtient que $R = R'$.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : à remplir. □

7.5. Lemme. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas quasi-compact. Pour que $f(X)$ soit un sous-ensemble fermé de Y, il faut et il suffit que, pour tout $y \in f(X)$, on ait $\overline{\{y\}} \subset f(X)$.*

Démonstration. Si $y \in Y$ et si $z \in \overline{\{y\}}$, on dit que z est une spécialisation de y. Montrons que, si $f(X)$ est stable par spécialisation, il est fermé. Pour cela on peut supposer que S est un schéma affine. En effet, pour tout ouvert affine U de Y, $f(X) \cap U$ est stable par spécialisation (dans U). En outre, comme f est un morphisme quasi-compact, on obtient que X est un schéma quasi-compact. Quitte à remplacer X par la réunion disjointe d'une famille finie d'ouverts affines, on peut supposer que X est un schéma affine.

Soient $\varphi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ le morphisme d'anneaux correspondant à $f : X \to Y$. Soit z un élément dans l'adhérence de $f(X)$. Pour tout élément $a \in \mathcal{O}(Y)$ tel que $t \in D(a)$, l'intersection de $D(a)$ avec $f(X)$ est non-vide. Rappelons que $D(a) \cap f(X)$ est l'image de $D(\varphi(a)) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(X)_{\varphi(a)})$ par f. En particulier, l'anneau $\mathcal{O}(X)_{\varphi(a)}$ est non-nul. Soit S la partie multiplicatif $\mathcal{O}(Y) \setminus z$, où on considère z comme un idéal premier de $\mathcal{O}(Y)$. On a

$$S^{-1}\mathcal{O}(X) \cong \varinjlim_{a \in \mathcal{O}(Y) \setminus z} \mathcal{O}(X)_{\varphi(a)}.$$

En particulier, cet anneau est non-nul. L'image d'un point du morphisme composé

$$\operatorname{Spec} S^{-1}\mathcal{O}(X) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) = X \longrightarrow Y$$

est un idéal premier y contenu dans z. Le point $y \in Y$ appartient à $f(X)$ et z est une spécialisation de y. On obtient donc $z \in f(X)$. □

7.6. Théorème. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si f est un morphisme universellement fermé, alors pour tout anneau de valuation A de corps des fractions K, l'application*

$$X(A) \longrightarrow X(K) \times_{Y(K)} Y(A),$$

qui envoie $(\varphi : \operatorname{Spec} A \to X) \in X(A)$ sur $(\varphi\eta, f\varphi)$, est surjective, où $\eta : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ désigne le morphisme de schémas correspondant au mor-

phisme d'anneaux d'inclusion $A \to K$. La réciproque est vrai lorsque f est quasi-compact.

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : Soit (v, g) un élément de $X(K) \times_{Y(K)} Y(A)$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} A \times_Y X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\eta"'] & \operatorname{Spec} A \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

où λ est l'unique morphisme tel que $g_X \lambda = v$ et $p\lambda = \eta$.

Soit x le seul point dans l'image de λ. Comme f est universellement fermé, le morphisme p est fermé. Il existe donc $x' \in \overline{\{x\}}$ tel que $p(x')$ soit l'unique point fermé de $\operatorname{Spec} A$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{x'} \arrow[r] & \mathcal{O}_x \arrow[d] \\
A \arrow[u] \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

Par définition, $\mathcal{O}_x$ est la localisation de $\mathcal{O}_{x'}$ en le noyau $\mathfrak{p}$ du morphisme composé $\mathcal{O}_{x'} \to \mathcal{O}_x \to K$. En outre, l'image réciproque de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{x'}$ dans A s'identifie à l'idéal maximal de A, qui est différent de l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ (égale à $\{0\}$). On en déduit que l'image de $\mathcal{O}_{x'}$ dans K est un sous-anneau strict de K, qui est donc égal à A (puisqu'il contient A). On en déduit que p admet une section

$$s : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{x'} \longrightarrow \operatorname{Spec} A \times_Y X.$$

"$\Longleftarrow$" : La propriété en question est stable par changement de base. Il suffit de montrer que f est un morphisme fermé. Soient $x \in X$ et $y = f(x)$ et $y' \in \overline{\{y\}}$ différent de y. Soit Y_1 le sous-schéma fermé réduit ayant $\overline{\{y\}}$ comme espace sous-jacent. Soit X_1 le sous-schéma fermé $Y_1 \times_Y X$ de X. Soit $f_1 : X_1 \to Y_1$ le morphisme de projection. L'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y'}$ est un anneau intègre, qui est différent de son corps de fractions $\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit A un anneau de valuation qui domine $\mathcal{O}_{Y,y'}$, dont le corps des fractions est $\kappa(x)$. On obtient alors un morphisme de $\operatorname{Spec} A$ dans Y dont le composé avec η se relève en un morphisme de $\operatorname{Spec} K$ dans X. On en déduit que ce morphisme se relève en un morphisme de $\operatorname{Spec} A$ dans X. Par conséquent, y' est dans l'image de $f(\overline{\{x\}})$. En particulier, pour tout sous-ensemble fermé F de X, $f(F)$ est stable par spécialisation, donc est un sous-ensemble fermé de Y (d'après le lemme précédent). $\square$

7.7. Corollaire. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas qui est quasi-séparé. Alors f est un morphisme séparé si et seulement si, pour tout anneau de valuation A de corps des fractions K, l'application*

$$X(A) \longrightarrow X(K) \times_{Y(K)} Y(A),$$

qui envoie $(\varphi : \operatorname{Spec} A \to X) \in X(A)$ sur $(\varphi\eta, f\varphi)$, est injective, où $\eta : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ désigne le morphisme de schémas correspondant au morphisme d'anneaux d'inclusion $A \to K$.

Démonstration. Comme $f : X \to Y$ est quasi-séparé, son morphisme de diagonal $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ est quasi-compact et est une immersion. En particulier, f est un morphisme séparé si et seulement si Δ_f est un morphisme universellement fermé. On applique le théorème 7.6 à Δ_f et obtient que f est séparé si et seulement si, pour tout anneau de valuation A de corps des fractions K, l'application canonique

$$X(A) \longrightarrow X(K) \times_{(X \times_Y X)(K)} (X \times_Y X)(A)$$

est surjective. Cette condition revient à dire que, si deux éléments P et Q dans $X(A)$ induisent le même point dans $Y(A)$ et le même point dans $X(K)$, alors il existe un troisième élément $R \in X(A)$ tel que $R = P = Q$. Cela revient à la condition prédite par le corollaire. $\square$