Chapitre VIII

Schéma projectif

1. Faisceau inversible ample

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma X qui est quasi-compact et quasi-séparé. On désigne par $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ le morphisme structurel. Pour tout $x \in X$, on désigne par $\mathcal{O}_{x,x}$ l'anneau local de X en x, par $\kappa(x)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $j_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ le morphisme de schémas qui définit l'inclusion de $\{x\}$ dans X. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $s \in H^0(X, L)$, on désigne par $s(x)$ l'image canonique de s dans $j_x^*(L)$ et on note

$$X_s := \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}.$$

1.1. Proposition. *Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $s \in H^0(X, L)$, alors X_s est un sous-ensemble ouvert de X.*

Démonstration. On se ramène au cas où X est affine et L est isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Dans ce cas-là X_s s'identifie à $D(s)$. □

1.2. Proposition. *Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et F un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Soit $s \in H^0(X, L)$.*

(1) Si f est un élément de $H^0(X, F)$ dont la restriction à X_s s'annule, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $s^n f = 0$ dans $H^0(X, L^{\otimes n} \otimes F)$.

(2) Si g est un élément de $H^0(X_s, F|_{X_s})$, alors il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la section $s^n|_{X_s} g$ s'étend en une section globale de $L^{\otimes n} \otimes F$ sur X.

Démonstration. (1) Pour la première partie, il suffit de supposer X quasi-compact. Dans ce cas-là on peut se ramener au cas où X est affine et L est trivial.

(2) On écrit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ où I est un ensemble fini et U_i est un ouvert affine de X sur lequel L se trivialise. Pour tout $i \in I$, soient $A_i = \mathcal{O}(U_i)$, $M_i = H^0(U_i, F)$ et s_i la restriction de s à U_i. Le schéma $X_s \cap U_i$ est affine d'anneau $(A_i)_{s_i}$. Il existe donc $m \geqslant 1$ tel que, pour tout i, $s_i^m|_{X_s\cap U_i} g|_{X_s\cap U_i}$ se relève en une section h_i dans $H^0(U_i, L^{\otimes m} \otimes F)$. Pour tout $(i,j) \in I^2$, soit $\alpha_{ij} = h_i|_{U_i\cap U_j} - h_j|_{U_i\cap U_j}$. On a $\alpha_{ij}|_{X_s\cap U_i\cap U_j} = 0$. Comme $U_i \cap U_j$ est quasi-compact, il existe n suffisamment grand tel que

$$(s_i^{n-m} h_i)|_{U_i\cap U_j} = (s_j^{n-m} h_j)|_{U_i\cap U_j}.$$

Par recollement on obtient le résultat. □

1.3. Définition. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est *ample* si, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini F, il existe un entier n_0 (qui dépend de F et L) tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le faisceau $L^{\otimes n} \otimes F$ soit engendré par ses sections globales.

On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est sans lieu de base si l'homomorphisme canonique $\pi^*\pi_*(L) \to L$ est un épimorphisme. Cela revient à dire que L est engendré par ses sections globales.

1.4. Proposition. *Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé.*

(1) Si L et L' sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles sans lieu de base, alors $L \otimes L'$ est sans lieu de base.

(2) On suppose qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample M. Un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est ample si et seulement s'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $L^{\otimes n_0} \otimes M^\vee$ soit engendré par ses sections globales.

(3) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample et si L' est un $\mathcal{O}_X$-module inversible sans lieu de base, alors $L \otimes L'$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample.

(4) Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Si L est ample, pour tout entier $n \geqslant 1$, $L^{\otimes n}$ est ample. Réciproquement, s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $L^{\otimes n}$ soit ample, alors L est ample.

(5) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample et si L' est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors il existe un entier n_0 tel que $L^{\otimes n} \otimes L'$ soit ample pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Démonstration. (1) Le morphisme canonique

$$\pi^*(\pi_*(L))\otimes_{\mathcal{O}_X}\pi^*(\pi_*(L'))\cong\pi^*(\pi_*(L)\otimes\pi_*(L'))\longrightarrow\pi^*(\pi_*(L\otimes L'))\longrightarrow L\otimes L'$$

est un épimorphisme. On en déduit que le morphisme canonique

$$\pi^*(\pi_*(L)\otimes\pi_*(L'))$$

est un épimorphisme.

(2) Montrons d'abord qu'il existe un entier $n_1\geqslant 1$ tel que $L^{\otimes n_1}$ soit sans lieu de base pour tout entier $n\geqslant n_1$. Comme M est ample, il existe un entier $n_2\geqslant 1$ tel que $M^{\otimes k}$, $M^{\otimes k}\otimes L,\ldots,M^{\otimes k}\otimes L^{\otimes(n_0-1)}$ soient sans lieu de base pour tout $k\geqslant n_2$. Si $n\geqslant n_1:=n_0n_2$, on peut écrire n sous la forme $n=kn_0+r$ avec $k\geqslant n_2$ et $r\in\{0,\ldots,n_0-1\}$. Par (1) on obtient que

$$L^{\otimes n}\cong(L^{\otimes n_0}\otimes M^\vee)^{\otimes k}\otimes(M^{\otimes k}\otimes L^{\otimes r})$$

est sans lieu de base.

Soit F un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Il existe un entier $m_0\geqslant 1$ tel que le faisceau $F\otimes M^{\otimes m_0}$ soit engendré par ses section globales. Comme ce faisceau est de type fini et X est quasi-compact, on en déduit qu'il existe un entier $N\geqslant 1$ et un épimorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathcal{O}_X^{\oplus N}\longrightarrow F\otimes M^{\otimes m_0}.$$

Quitte à prendre le produit tensoriel par $M^{\vee\otimes m_0}$ on obtient un épimorphisme

$$(M^{\vee\otimes m_0})^{\oplus N}\longrightarrow F.$$

Si n est un entier, $n\geqslant n_0m_0+n_1$, on peut écrire n sous la forme $n=km_0+r$, où k et r sont deux entiers, $k\geqslant n_0$ et $n\geqslant n_1$. On a

$$L^{\otimes n}\otimes M^{\vee\otimes m_0}\cong(L^{\otimes n_0}\otimes M^\vee)^{\otimes m_0}\otimes L^{\otimes((k-n_0)m_0+r)},$$

qui est sans lieu de base. On en déduit que $L^{\otimes n}\otimes F$ est engendré par ses sections globales.

(3) On a $(L\otimes L')\otimes L^\vee$ est sans lieu de base. Par (2) on obtient que $L\otimes L'$ est ample.

(4) On suppose que L est ample. Il existe un entier $m_0\geqslant 1$ tel que $L^{\otimes m}$ soit sans lieu de base pour tout entier $m\geqslant m_0$. Si $n\geqslant 1$ est un entier, on a $(L^{\otimes n})^{\otimes m_0}\otimes(L^{\vee m_0n})\cong\mathcal{O}_X$ est sans lieu de base. Par (2) on obtient que $L^{\otimes n}$ est ample.

Réciproquement, si $L^{\otimes n}$ est ample, où n est un entier, $n\geqslant 2$, comme $L^{\otimes n}\otimes(L^{\otimes n})^\vee\cong\mathcal{O}_X$ est sans lieu de base, on obtient que L est ample.

(5) Il existe un entier n_0 tel que $L^{\otimes n} \otimes L'$ soit sans lieu de base pour tout entier $n \geqslant n_0 - 1$. Donc $L^{\otimes n} \otimes L' = (L^{\otimes(n-1)} \otimes L') \otimes L$ est ample pour tout $n \geqslant n_0$. □

2. Schéma quasi-projectifs

Soient S un schéma, F un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et L un $\mathcal{O}_S$-module inversible. Si $f : F \to L$ est un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, on appelle *lieu de base* de f le sous-schéma défini par l'idéal quasi-cohérent l'image de morphisme

$$1 \otimes f : L^\vee \otimes F \longrightarrow L^\vee \otimes L \cong \mathcal{O}_S.$$

2.1. Théorème. *Soient S un schéma et E un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Le foncteur $\mathbf{Sch}^\circ_{/S} \to \mathbf{Ens}$, qui associe à chaque S-schéma $\varphi : X \to S$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients inversibles de $\varphi^*(E)$, est représentable par un S-schéma $\pi : \mathbb{P}(E) \to S$.*

Démonstration. On définit un foncteur $G : \mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$ comme suit. Pour tout $A \in \mathbf{An}$, $G(A)$ est l'ensemble des couples (ρ, f), où $\rho \in S(X)$ et $f : \rho^*(E) \to Q_f$ est un A-module quotient projectif de rang 1 de $\rho^*(E)$ (on identifie $\rho^*(E)$ à un A-module). Par recollement de morphismes de schémas et recollement de faisceaux quasi-cohérents, on obtient que G est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck.

Soient U un ouvert affine de S et s un élément de $E(U)$, on définit un sous-foncteur G_s de G comme suit. Pour tout anneau $A \in \mathbf{An}$, $G_s(A)$ est l'ensemble des $(\rho, f) \in G(A)$ tels que $\mathrm{Im}(\rho) \subset U$ et que

$$A \xrightarrow{s} E(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A \xrightarrow{f} Q_f$$

soit un isomorphisme.

Montrons d'abord que le foncteur G_s est représentable. Soit R l'algèbre symétrique de $E(U)$ sur $\mathcal{O}(U)$. Soit $R_{(s)}$ le sous-anneau de la localisation R_s engendré par les éléments de la forme t/s où $t \in \mathcal{O}(U)$. Montrons que G_s est représenté par $R_{(s)}$. Rappelons que R représente le foncteur qui envoie $A \in \mathbf{An}$ sur l'ensemble des couples (θ, α), où $\theta : \mathcal{O}(U) \to A$ est un morphisme d'anneau et $\alpha : E(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A \to A$ est un morphisme de A-modules. On a

$$A \xrightarrow{s} E(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A \xrightarrow{\alpha} A$$

est un isomorphisme si et seulement si $\alpha(s \otimes 1)$ est un élément inversible de A. Cela revient à dire que α induit un morphisme de $\mathcal{O}(U)$-algèbres de $R_{(s)}$ vers A.

Montrons ensuite que le sous-foncteur G_s est ouvert. Soit $\lambda : h_A \to G$ un morphisme de foncteur, qui correspond à un couple $(\rho, f) \in G(A)$, où $\rho : \operatorname{Spec} A \to S$ est un morphisme, $f : \rho^*(E) \to L$ est un quotient projectif de rang 1, alors $G_s \times_G h_A$ est le sous-foncteur de h_A défini par l'ouvert

$$\{x \in \operatorname{Spec} A \mid f(x)(s(x)) \neq 0\}.$$

Il existe alors un schéma $\mathbb{P}(E)$ qui représente le foncteur G. En outre, on a un morphisme de foncteurs naturel de G vers $\mathfrak{S}_S$ par la projection sur la première coordonnée, qui correspond à un morphisme de schémas $\mathbb{P}(E) \to S$. Par le recollement de faisceaux on obtient que le foncteur dans le théorème est représenté par le S-schéma $\mathbb{P}(E)$. □

2.2. Remarque.

(1) Si E est de type fini, alors le morphisme $\mathbb{P}(E) \to S$ est de type fini.

(2) Si on désigne par $\pi : \mathbb{P}(E) \to S$ le morphisme structurel, alors l'objet universel du foncteur représentable est un quotien inversible que l'on note $\mathcal{O}_E(1)$.

(3) Si $E \to E'$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérent, alors on a un morphisme naturel $\mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$ qui est une immersion fermée.

(4) Soient S un schéma, E un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et L un $\mathcal{O}_S$-module inversible. Si $f : E \to L$ est un morphisme de $\mathcal{O}_S$-module, on appelle *lieu de base* de f (noté $B(f)$) le sous-schéma fermé défini par l'idéal quasi-cohérent l'image du morphisme

$$1_{L^\vee} \otimes f : L^\vee \otimes E \longrightarrow L^\vee \otimes L \cong \mathcal{O}_S.$$

Par définition, f est un épimorphisme si et seulement si son lieu de base est vide.

(5) Si $\varphi : X \to S$ est un morphisme de schémas et si $f : \varphi^*(E) \to L$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules, alors f induit un morphisme de S-schémas

$$\psi : X \setminus B(f) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$$

tel que $\psi^*(\mathcal{O}_E(1))$ soit isomorphe à la restriction de L à $X \setminus B(f)$.

2.3. Proposition. *Soient S un schéma et E un $\mathcal{O}_S$-module de type fini. Alors le morphisme $\pi : \mathbb{P}(E) \to S$ est propre.*

Démonstration. On a vu que le morphisme π est de type fini. Soit A un anneau de valuation dont le corps des fractions est K. Soit $\rho : \operatorname{Spec} A \to S$ un morphisme de schémas et $\lambda : E \otimes_{\mathcal{O}_S} K \to K$ un quotient de rang 1. L'image de $E \otimes_{\mathcal{O}_S} A$ par λ donne un quotient de $E \otimes_{\mathcal{O}_S} A$ qui est un sous-A-module de type fini de K (donc est un A-module libre de rang 1). Par le critère valuatif de propreté, on obtient que le morphisme π est propre. □

2.4. Spectre projectif

Soit S un schéma. Soit $A_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre graduée quasi-cohérente. On suppose que $A_\bullet$ est engendré par A_1. On définit un foncteur $F : \mathbf{Sch}^\circ_{/S} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout S-schéma $\varphi : T \to S$ sur l'ensemble des quotients inversible du faisceau $\varphi^*(A_1) \to L$ qui se prolongent en un morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^{\otimes n}.$$

Il s'avère que ce foncteur est représentable par un S-schéma que l'on note $\operatorname{Proj}(A_\bullet)$, appelé *spectre projectif* de $A_\bullet$. En outre, le S-morphisme canonique $\operatorname{Proj}(A_\bullet) \to \mathbb{P}(A_1)$ est une immersion fermée.

2.5. Définition. Soient S un schéma et $\varphi : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est très ample relativement à φ s'il existe un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent F et une S-morphisme $i : X \to \mathbb{P}(F)$ telle que i soit une immersion et que $L \cong i^*\mathcal{O}_F(1)$. Si $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, on dit simplement que L est très ample.

2.6. Exemple. Si L est sans lieu de base et $X \to \mathbb{P}(\varphi_* L)$ est une immersion, alors L est très ample relativement à φ.

Enfin, on montre que G est recouvert par les G_s. Soit K un corps. L'ensemble $G(K)$ consiste des couples de la forme (ρ, f), où $\rho : \operatorname{Spec} K \to S$ est un morphisme de schémas, et $f : \rho^* E \to K$ est un épimorphisme de K-modules. Il existe donc un voisinage ouvert affine U de $\operatorname{Im}(\rho)$ et $s \in E(U)$ tel que $f(s \otimes 1)$ est non-nul. On obtient donc $(\rho, f) \in G_s(K)$.

2.7. Proposition. *Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, $\varphi : X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module très ample relativement à φ, alors il est ample.*

Démonstration. Il existe un A-module E est un épimorphisme $\varphi^*(E) \to L$ qui induit un épimorphisme

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Sym}^n(\varphi^* E) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^{\otimes n}.$$

Par définition $\mathbb{P}(E)$ est le spectre projectif de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Sym}^n(E)$ et on a $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(n)) \cong \operatorname{Sym}^n(E)$. De plus, les ouverts de la forme $\mathbb{P}(E)_u$, où $u \in \bigcup_{n\geqslant 1} \operatorname{Sym}^n(E)$ forment une base de topologie de $\mathbb{P}(E)$. Par conséquent, les ouverts de X de la forme X_s, où $s \in \bigcup_{n\geqslant 1} H^0(X, L^{\otimes n})$ forment une base de topologie de X.

Soit F un$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Il existe un entier d suffisamment divisible et une famille finie $(s_i)_{i=1}^n$ d'éléments de $H^0(X, L^{\otimes d})$ telles que, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $F|_{X_{s_i}}$ est un quotient d'un $\mathcal{O}_{X_{s_i}}$-module libre de rang fini. si g est une section dans $H^0(X_{s_i}, F)$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $s_i^n g$ se prolonge en une section globale. Par conséquent, pour n suffisamment grand, $L^{\otimes dn} \otimes F$ est engendré par ses sections globales. Donc $L^{\otimes d}$ est ample. □

2.8. Proposition. *Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, $\varphi : X \to S$ un morphisme quasi-séparé et de type fini, et L un $\mathcal{O}_X$-module ample. Alors il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $L^{\otimes n}$ soit très ample relativement à φ.*

Démonstration. Le point clé est de montrer que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert affine de x de la forme X_s avec $s \in \bigcup_{n \geqslant 1} \Gamma(X, L^{\otimes n})$. Soit U un voisinage ouvert affine de x, où L se trivialise. Soit I un faisceau d'idéaux qui définit un sous-schéma fermé dont l'espace topologique sous-jacent est $X \setminus U$. Pour tout entier n, soit I_n l'image de

$$\varphi^*(\varphi_*(I \otimes L^{\otimes n})) \otimes L^{\vee \otimes n} \longrightarrow I.$$

Comme X est quasi-compact, I est la limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_X$-modules de type fini. Il s'avère que, pour tout sous-$\mathcal{O}_X$-module de type fini I' de I, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $I' \subset I_n$, d'où $I = \sum_{n \geqslant 1} I_n$. Il existe alors $s \in \Gamma(X, I \otimes L^{\otimes n}) \subset \Gamma(X, L^{\otimes n})$ tel que $s(x) \neq 0$, ou de façon équivalente, $x \in X_s \subset U$. Comme L se trivialise sur U on obtient que X_s est un sous-schéma ouvert de U défini par la non-annihilation d'une fonction régulière, donc un schéma affine.

Comme X est quasi-compact, il existe un entier $d \geqslant 1$ et une famille finie de sections $(s_i)_{i=1}^n$ dans $\Gamma(X, L^{\otimes d})$ telle que $(X_{s_i})_{i=1}^n$ forment un recouvrement de X par des ouverts affines. Pour tout $i \in \{1, \dots, n, \}$, l'anneau de X_{s_i} est une A-algèbre de type fini. Soit $(f_{ij})_{j \in J_i}$ une famille de générateurs de $\mathcal{O}(X_{s_i})$ comme A-algèbre. Il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $s_i^r f_{ij}$ se prolong en une section s_{ij} de $L^{\otimes rd}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in J_i$ (car X est quasi-compact et quasi-séparé).

Considérons le morphisme canonique $\eta : X \to \mathbb{P}(\Gamma(X, L^{\otimes rd})) =: P$ induit par le morphisme canonique $\varphi^*(\varphi_*(L^{\otimes rd})) \to L^{\otimes rd}$. On a $X_{s_i} = \eta^{-1}(P_{s_i^r})$ pour tout i. En outre, $P_{s_i^r}$ est un schéma affine et le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}(P_{s_i^r}) \to \mathcal{O}(X_{s_i})$ envoie s_{ij}/s_i^r sur f_{ij}, donc est surjectif. On en déduit que η est une immersion fermée. □

Bibliographie

[1] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice ıt Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[3] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

Notations

Index

anneau, **11**
factoriel, *11*

corps, *11*

nombres
réels, 11

polynômes
à coefficients entiers, 11
à une variable, **11**

Imprimé en Belgique et achevé sur les presses de SNEL Grafics, à Liège
Dépôt légal février 2015