CHAPITRE 2

TOPOLOGIE

2.1. Espace métrique

Définition 2.1. — Soit X un ensemble. On appelle *métrique sur* X toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) (symétrie) $\forall\,(x,y) \in X \times X$, $d(x,y) = d(y,x)$,

(2) (inégalité triangulaire) $\forall\,(x,y,z) \in X \times X \times X$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

(3) (séparation) $\forall\,(x,y) \in X \times X$, $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

Le couple (X,d) s'appelle un *espace métrique*. Si A est un sous-ensemble de X, alors la restriction de d à $A \times A$ définit une métrique sur A, appelé *métrique induite* sur A. L'ensemble A muni de la métrique induite est appelé un *sous-espace métrique* de (X,d). On dit qu'un sous-ensemble A de X est *borné* s'il existe $C > 0$ tel que $d(x,y) \leqslant C$ pour tout $(x,y) \in A^2$.

Exemple 2.2. — Soit E un espace vectoriel sur k muni d'une norme $\|\cdot\|$. Si X est un sous-ensemble non-vide de E, alors la fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) := \|x-y\|$ est une métrique sur X.

Définition 2.3. — Soient (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. On appelle *boule ouverte centrée en x et de rayon ε* l'ensemble $B(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$.

Si x est un point de X, on appelle *voisinage* de x tout sous-ensemble de X contenant une boule ouverte centrée en x. On dit qu'un sous-ensemble U de X est *ouvert* si, pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x.

Proposition 2.4. — *Soit (X,d) un espace métrique.*

(1) $\varnothing$ et X sont des sous-ensembles ouverts de X.

(2) Si U et V sont deux sous-ensembles ouverts de X, $U \cap V$ l'est aussi.

(3) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles ouverts de X, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un sous-ensemble ouvert de X.

(4) Toute boule ouverte est un sous-ensemble ouvert de X.

(5) Tout sous-ensemble ouvert de X est une réunion de boules ouvertes.

Démonstration. — (1) est trivial.

(2) Soit x un élément de $U \cap V$. Comme U et V sont ouverts, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que $B(x, \varepsilon_1) \subset U$ et $B(x, \varepsilon_2) \subset V$. Soit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On a alors $B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$.

(3) Soit x un élément de $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. On suppose que $x \in U_i$, où $i \in I$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i \subset U$.

(4) Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Si y est un élément de $B(x, \varepsilon)$, on a $d(x, y) < \varepsilon$. Donc il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$ et que $d(x, y) < \varepsilon - \delta$. Montrons que $B(y, \delta)$ est contenu dans $B(x, \varepsilon)$. En effet, pour tout $z \in B(y, \delta)$ on a $d(y, z) < \delta$, d'où

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon.$$

(5) Soit U un sous-ensemble ouvert de X. Pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$. On a alors $U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x)$. □

Définition 2.5. — Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble F de X est *fermé* si son complémentaire dans X est ouvert.

On déduit de la proposition 2.4 les énoncés suivants.

Corollaire 2.6. — *Soit (X, d) un espace métrique.*

(1) $\varnothing$ et X sont des sous-ensembles fermés de X.

(2) Si F et F' sont deux sous-ensembles fermés de X, alors $F \cup F'$ l'est aussi.

(3) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles fermés de X, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-ensemble fermé de X.

Exemple 2.7. — Soit (X, d) un espace métrique. Si $x \in X$ et si $\varepsilon > 0$, alors $\overline{B}(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ est un sous-ensemble fermé. En effet, si z est un point en dehors de $\overline{B}(x, \varepsilon)$, alors on a $d(x, z) > \varepsilon$. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que $d(x, z) > \varepsilon + \delta$. Par conséquent, si $y \in B(z, \delta)$, alors

$$d(y, x) \geqslant d(x, z) - d(y, z) > \varepsilon + \delta - \delta > \varepsilon.$$

En particulier, le cercle $\{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ est aussi un sous-ensemble fermé de X car il est égal à $\overline{B}(x, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon)^c$.

Définition 2.8. — Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ un sous-ensemble. On appelle *point adhérent* de A tout élément $x \in X$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. On désigne par $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A, appelé *l'adhérence* de A dans X.

Si A est un sous-ensemble de X et si x est un élément de X, on définit

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y),$$

appelé *distance* de x à A. On voit aussitôt de la définition que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.

Proposition 2.9. — *Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Alors $\overline{A}$ est le plus petit sous-ensemble fermé contenant A.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\overline{A}$ est un sous-ensemble fermé de X. Soit x un élément de $X \setminus \overline{A}$. On a $d(x, A) > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $d(x, A) > \varepsilon$. Soit x' un élément de $B(x, \varepsilon/2)$. Pour tout $y \in A$ on a

$$d(x', y) \geqslant d(x, y) - d(x, x') > \varepsilon/2,$$

d'où $d(x', A) \geqslant \varepsilon/2$. On en déduit $B(x, \varepsilon/2) \subset X \setminus \overline{A}$, ce qui montre que $X \setminus \overline{A}$ est un sous-ensemble ouvert.

Montrons ensuite que tout sous-ensemble fermé de X contenant A contient nécessairement $\overline{A}$. Soit F un sous-ensemble fermé de X, $F \supset A$. Si x est un point en dehors de F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset (X \setminus F)$. Cela montre que $d(x, y) > \varepsilon$ pour tout $y \in A \subset F$. On en déduit $d(x, A) \geqslant \varepsilon > 0$ et donc $x \notin \overline{A}$. □

2.2. Convergence

Définition 2.10. — Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points dans X *converge* vers $x \in X$ si

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0. \tag{2.1}$$

Le point $x \in X$ est appelé *limite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.11. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X, d), qui converge vers un point $x \in X$. Pour tout voisinage V de x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x; \varepsilon) \subset V$. Par la relation (2.1), on obtient qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$.

Proposition 2.12. — *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Si cette suite admet une limite, alors sa limite est unique.*

Démonstration. — Soient x et y deux éléments de X qui sont des limites de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a (d'après l'inégalité triangulaire)

$$0 \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y).$$

En prenant la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$. □

Proposition 2.13. — *Soient (X, d) un espace métrique, A un sous-ensemble de X et x un point de X. Alors x appartient à $\overline{A}$ si et seulement s'il peut s'écrire comme la limite d'une suite dans A.*

Démonstration. — On suppose que x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A. Comme $d(x_n, x)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini, on obtient que $d(x, A) = 0$ et donc $x \in \overline{A}$.

Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x) < 1/(n+1)$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. □

2.3. Continuité

Définition 2.14. — Soient X et Y deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *continue* en $x \in X$ si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y converge vers $f(x)$. Si l'application f est continue en tout point $x \in X$, on dit que f est *continue.*

Exemple 2.15. — Soient (X, d) un espace métrique et y un élément de X. Alors l'application $d(y, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ est continue. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X qui converge vers $x \in X$. On a $-d(x, x_n) \leqslant d(y, x) - d(y, x_n) \leqslant d(x, x_n)$. En prenant la limite quand $n \to 0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |d(y, x_n) - d(y, x)| = 0$$

Proposition 2.16. — *Soient X et Y deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et x un point de X. L'application f est continue en x si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.*

Démonstration. — "Nécessité" : On suppose que V est un voisinage de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un élément

$$x_n \in B(x, 1/(n+1)) \setminus f^{-1}(V).$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Cependant, aucun des points $f(x_n)$ n'est dans l'ensemble V. Cela est absurde car V est un voisinage de $f(x)$.

"Suffisance" : On suppose que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans M qui converge vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(f(x), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x)$. Par conséquent, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un voisinage de x, et donc contient une boule ouverte $B(x, \delta)$ centrée en x, où $\delta > 0$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, \delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$. On en déduit que $f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. □

Corollaire 2.17. — *Soient X et Y deux espaces métrique, et $f : X \to Y$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) f est une application continue.

(b) L'image réciproque de tout ouvert de Y est un sous-ensemble ouvert de X.

(c) L'image réciproque de tout fermé de Y est un sous-ensemble fermé de X.

Démonstration. — Pour tout sous-ensemble A de Y, on a $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. Donc les énoncés (b) et (c) sont équivalents.

On suppose que f est une application continue. Soit V un sous-ensemble ouvert de Y. Pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on a $f(x) \in V$. Comme V est un sous-ensemble ouvert de Y, il est un voisinage de $f(x)$. On en déduit que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Comme x est arbitraire, on obtient que $f^{-1}(V)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

Réciproquement, on suppose que l'image réciproque de tout sous-ensemble ouvert de Y par f est un sous-ensemble ouvert de X. Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de $f(x)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Comme $B(f(x), \varepsilon)$ est un sous-ensemble ouvert de Y, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un sous-ensemble ouvert de X contenant x. On en déduit que $f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de x. Donc f est continue en x. □

Proposition 2.18. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normé sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est continue si et seulement si*

$$\|f\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} < +\infty$$

Démonstration. — "$\Longleftarrow$" : Si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite dans V qui converge vers un point x, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f(x_n) - f(x)\| = 0$ car

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|f(x_n - x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x\|.$$

"$\Longrightarrow$" : Comme f est une application continue, l'image réciproque de $B(0,1) \subset F$ est un voisinage de 0. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset f^{-1}(B(0,1))$. On pose $C = 2\varepsilon^{-1}$. Soient x un vecteur non-nul dans V et

$$y = \frac{\varepsilon}{2\|x\|} x.$$

On a $\|y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Donc $\|f(y)\| < 1$. Or

$$\|f(y)\| = \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \|f(x)\|.$$

On obtient alors $\|f(x)\| < 2\varepsilon^{-1}\|x\| = C\|x\|$. □

2.4. Espace séquentiellement compact

Définition 2.19. — Soit X un espace métrique. On dit que X est *séquentiellement compact* si toute suite dans X admet une sous-suite convergente. Dans ce cours, on admet que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est séquentiellement compact si et seulement s'il est *fermé et borné* (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Proposition 2.20. — *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métrique. Si A est un sous-espace métrique séquentiellement compact de X, alors $f(A)$ est un sous-espace métrique séquentiellement compact de X.*

Démonstration. — Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n un élément de X tel que $f(x_n) = y_n$. Comme X est séquentiellement compact, on obtient qu'il existe une sous-suite $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in A$. Comme f est continue, on obtient que la suite $(y_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Par conséquent, $f(A)$ est séquentiellement compact. □

Proposition 2.21. — *Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble séquentiellement compact de X. Alors A est fermé et borné.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $A = \overline{A}$, i.e., tout point adhérent de A appartient à A. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers un point $x \in X$. Comme A est séquentiellement compact, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans A. Cela montre que $x \in A$. Si x est un point de A, alors $\{d(x, y) \mid y \in A\}$ est séquentiellement compact dans $\mathbb{R}$ car $d(x, \cdot)$ est une fonction continue. On en déduit que A est bornée. □

Proposition 2.22. — *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Si A est un sous-ensemble fermé de X, alors il est aussi séquentiellement compact.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A. Comme X est séquentiellement compact, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in X$. Comme A est fermé, on obtient $x \in A$. Donc A est séquentiellement compact. □

Proposition 2.23. — *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée, et atteint ses valeurs maximale et minimale.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.20, l'image de f est un sous-ensemble séquentiellement compact de $\mathbb{R}$, donc est un sous-ensemble fermé et borné. Par conséquent, $f(X)$ est borné, et $\sup_{x\in X} f(x)$ et $\inf_{x\in X} f(x)$ appartiennent à $f(X)$. □

2.5. Continuité uniforme

Soit $f : X \to Y$ une application entre des espaces métriques. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{(x,x')\in X^2 \\ d(x,x')<\delta}} d(f(x), f(x')) = 0.$$

Par définition, si f est uniformément continue, alors elle est continue.

Proposition 2.24. — *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre des espaces métriques. Si X est séquentiellement compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. — Supposons le contraire, il existe alors $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X tels que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ et que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} d(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon. \tag{2.2}$$

Comme X est séquentiellement compact, quitte à prendre des sous-suites, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite x. Comme f est continue, les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(x)$, ce qui contredit (2.2). □

2.6. Complétude

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans X est une *suite de Cauchy* si

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m) = 0.$$

On dit que l'espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Proposition 2.25. — *Toute suite convergente dans un espace métrique (X, d) est une suite de Cauchy.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers $x \in X$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, on a

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) \leqslant 2 \sup_{l\geqslant N} d(x_l, x).$$

Cela implique que $\sup_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m) \leqslant 2 \sup_{l\geqslant N} d(x_l, x)$. En prenant la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{N\to+\infty} \sup\limits_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m) = 0$ □

Proposition 2.26. — *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique. Si une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le même point.*

Démonstration. — Soit $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x, où $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'indices. D'après l'exemple 2.15, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_N, x) = \lim_{l\to+\infty} d(x_N, x_{n_l}) \leqslant \sup_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m).$$

En prenant la limite quand $N \to +\infty$, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Corollaire 2.27. — *Tout espace métrique séquentiellement compact est complet.*

Démonstration. — Soit (X, d) un espace métrique séquentiellement compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. Comme X est séquentiellement compact, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans X. Par la proposition 2.26, on obtient que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Proposition 2.28. — *Soient E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$ et $(e_j)_{j=1}^r$ une base de E. Soit $\|\cdot\|$ la norme sur E telle que $\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\| = \max(|a_1|, \ldots, |a_r|)$.*

(a) L'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

(b) Tout sous-espace borné et fermé de $(E, \|\cdot\|)$ est séquentiellement compact.

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E, où $x_n = a_{n,1}e_1 + \cdots + a_{n,r}e_r$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x = a_1e_1 + \cdots + a_re_r$ si et seulement si $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a_j pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$.

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, où $x_n = a_{n,1}e_1 + \cdots + a_{n,r}e_r$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\|x_n - x_m\| = \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} |a_{n,j} - a_{m,j}|.$$

En particulier, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, la suite $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge dans $\mathbb{R}$. On e déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) Soit A un sous-ensemble fermé et borné de E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, où $x_n = a_{n,1}e_1 + \cdots + a_{n,r}e_r$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, la suite $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On obtient qu'il existe une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite appartient à A puisque A est fermé. Le sous-espace A est donc séquentiellement compact. □

Théorème 2.29. — *Soit E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$. Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|' \leqslant C\|\cdot\|$. Comme des conséquences, les énoncés suivants sont vrais.*

(a) Tout sous-ensemble U de E est ouvert par rapport à $\|\cdot\|$ si et seulement s'il ouvert par rapport à $\|\cdot\|'$.

(b) Tout espace vectoriel normé de rang fini sur $\mathbb{R}$ est complet.

(c) Tout sous-ensemble fermé et borné d'un espace vectoriel normé de rang fini sur $\mathbb{R}$ est séquentiellement compact.

Démonstration. — Soit $(e_j)_{j=1}^r$ une base de E. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|' = \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} |a_j|$. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_re_r\| \leqslant \sum_{j=1}^r |\lambda_j| \cdot \|e_j\| \leqslant \|\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_re_r\|' \sum_{j=1}^r \|e_j\|.$$

Cela montre en outre que l'application linéaire $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|') \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ est continue. Comme le cercle unité de $(E, \|\cdot\|')$ est fermé et borné, il est séquentiellement compact (d'après la proposition 2.28). Il est donc un sous-ensemble séquentiellement compact dans $(E, \|\cdot\|)$ (car elle est l'image d'un sous-ensemble séquentiellement compact par une application continue). Donc elle est une partie fermée et bornée dans $(E, \|\cdot\|)$ qui ne continent pas 0. On en déduit donc

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^d,\, \|y\|'=1} \|y\| > 0.$$

□