CHAPITRE 4

INTÉGRATION

4.1. Notations et hypothèses

On fixe un ensemble non-vide Ω et un espace vectoriel S de fonctions réelles sur Ω tel que, pour tout couple $(f, g) \in S^2$, on ait $\min(f, g) \in S^2$. Comme S est un espace vectoriel, on en déduit que, pour tout $(f, g) \in S^2$, on a

$$\max(f, g) = f + g - \min(f, g) \in S, \quad |f| = \max(f, 0) - \min(f, g) \in S.$$

On appelle *application d'intégration* toute forme linéaire $I : S \to \mathbb{R}$ telle que $I(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive dans S (cette hypothèse montre que l'application I préserve la relation d'ordre : pour tout couple $(f, g) \in S^2$ tel que $f \leqslant g$, on a $I(f) \leqslant I(g)$) et satisfait à la condition de convergence monotone comme suit : *pour toute suite* décroissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions dans* S *qui converge simplement vers la fonction nulle, la suite* $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0. Cette condition implique que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *croissante* de fonctions dans S qui converge vers une fonction $f \in S$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f)$. En effet, la suite $(f - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S est décroissante et converge simplement vers la fonction nulle. Donc $I(f - f_n) = I(f) - I(f_n)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Dans la suite, on fixe une application d'intégration $I : S \to \mathbb{R}$. On désigne par $S^\uparrow$ l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui peuvent s'écrire comme la limite simple d'une suite croissante de fonctions dans S. On vérifie facilement que l'ensemble $S^\uparrow$ est stable par addition et par multiplication par un scalaire positif. La proposition suivante montre que l'application linéaire $I : S \to \mathbb{R}$ s'étend en une application $I : S^\uparrow \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui préserve l'addition et la multiplication par un scalaire positif.

Proposition 4.1. — *(1) Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* S *et* f *un élément de* S*. Si* f *est majorée par la limite simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, alors* $I(f)$ *est borné supérieurement par la limite de* $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$*.*

(2) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes dans S, si la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par celle de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} I(g_n).$$

Démonstration. — (1) La suite $(\min(f, f_n))_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers f. On obtient donc

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(\min(f, f_n)) \leqslant \lim_{n\to+\infty} I(f_n).$$

(2) Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ on a

$$f_m \leqslant \lim_{n\to+\infty} f_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} g_n.$$

D'après (1), on a

$$I(f_m) \leqslant \lim_{n\to+\infty} I(g_n).$$

Par passage à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient le résultat. □

On étend I en une application de $S^\uparrow$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ comme suit. Si f est un élément de $S^\uparrow$ qui s'écrire comme la limite d'une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S, on pose

$$I(f) := \lim_{n\to+\infty} I(f_n).$$

La proposition 4.1 montre que cette définition ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés élémentaire de limite montrent que l'application étendue satisfait aux conditions suivantes :

(1) si f et g sont deux éléments de $S^\uparrow$, on a $I(f + g) = I(f) + I(g)$;

(2) si $f \in S^\uparrow$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $I(\lambda f) = \lambda I(f)$;

(3) si f et g sont deux éléments de $S^\uparrow$ tels que $f \leqslant g$, alors $I(f) \leqslant I(g)$.

La proposition suivante montre que $S^\uparrow$ est stable par limite croissante et que l'opérateur $I : S^\uparrow \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ préserve la limite croissante.

Proposition 4.2. — *Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante dans $S^\uparrow$ qui converge simplement vers une application $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors f appartient à $S^\uparrow$, et*

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n). \tag{4.1}$$

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $(g_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans S qui converge vers f_k. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n = \max(g_{0,n}, \ldots, g_{n,n}) \in S$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $k \leqslant n$, on a $f_n \geqslant h_n \geqslant g_{k,n}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f \geqslant \lim_{n\to+\infty} h_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} g_{k,n} = f_k$. Par passage à la limite quand $k \to +\infty$, on obtient $f = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n \in S^\uparrow$. De plus, on a $I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(h_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f \geqslant f_n$, d'où $I(f) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n)$. L'égalité (4.1) est donc démontrée. □

On désigne par $S^{\downarrow}$ l'ensemble $\{-f \,:\, f \in S^{\uparrow}\}$, qui s'identifie à l'ensemble des applications de Ω vers $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ limites simples de suites décroissantes dans S. L'ensemble $S^{\downarrow}$ est stable par addition, multiplication par un scalaire positif, les opérations max et min, ainsi que limite décroissante. On peut étendre I en une application de $S^{\downarrow}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telle que

$$\forall\, f \in S^{\downarrow}, \quad I(f) := -I(-f).$$

L'application étendue satisfait aux propriétés suivantes :

(1) si f et g sont deux éléments de $S^{\downarrow}$, on a $I(f+g) = I(f) + I(g)$;

(2) si $f \in S^{\downarrow}$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $I(\lambda f) = \lambda I(f)$;

(3) si f et g sont deux éléments de $S^{\downarrow}$ tels que $f \leqslant g$, alors $I(f) \leqslant I(g)$;

(4) si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante dans $S^{\downarrow}$ qui converge vers une application f, alors $f \in S^{\downarrow}$ et $I(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n)$.

Remarque 4.3. — Soit h une fonction dans $S^{\uparrow}\cap S^{\downarrow}$. Il existe alors une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent simplement vers h. La suite $(g_n - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S est décroissante et converge simplement vers la fonction nulle. On en déduit que les suites $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Ainsi les applications étendues $S^{\uparrow} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $S^{\downarrow} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ définissent en fait une application $I : S^{\downarrow}\cup S^{\uparrow} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Cette application préserve la relation d'ordre. En effet, si $f \in S^{\downarrow}$ et $g \in S^{\uparrow}$ sont tels que $f \leqslant g$ (c'est le seul cas qui ne provient pas directement de la définition), alors on a $-f \in S^{\uparrow}$, et donc $g - f \in S^{\uparrow}$. On en déduit que $0 \leqslant I(g-f) = I(g) + I(-f) = I(g) - I(f)$.

4.2. Fonctions intégrables

On désigne par $\mathscr{L}^1(S,I)$ l'ensemble des fonctions réelles h sur Ω telles que

$$\sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leqslant h} I(g) = \inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant h} I(f) \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Si h est un élément de $\mathscr{L}^1(S,I)$, on désigne par $I(h)$ le nombre réel dans (4.2).

Théorème 4.4. — *L'ensemble $\mathscr{L}^1(S,I)$ est un espace vectoriel contient S, qui est stable par l'opérateur* min, *et $I : \mathscr{L}^1(S,I) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire positive qui prolonge $I : S \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathscr{L}^1(S,I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $I : \mathscr{L}^1(S,I) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire. Si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathscr{L}^1(S,I)$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{g_1\in S^{\downarrow},\, g_1\leqslant h_1} I(g_1) + \sup_{g_2\in S^{\downarrow},\, g_2\leqslant h_2} I(g_2) &\leqslant \sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leqslant h_1+h_2} I(g)\\ \leqslant \inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant h_1+h_2} I(f) &\leqslant \inf_{f_1\in S^{\uparrow},\, f_1\geqslant h_1} I(f_1) + \inf_{f_2\in S^{\uparrow},\, f_2\geqslant h_2} I(f_2).\end{aligned}$$

Comme h_1 et h_2 appartiennent à $\mathscr{L}^1(S,I)$, on obtient que le premier et le dernier termes dans la formule précédente sont égaux. Donc tous les termes dans ces inégalités sont en fait égaux et on en déduit $h_1+h_2 \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et $I(h_1+h_2)=I(h_1)+I(h_2)$. De façon similaire, on peut vérifier que, si $h \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et si $\lambda \geqslant 0$, alors on a $\lambda h \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et $I(\lambda h)=\lambda I(h)$. Enfin, si $h \in \mathscr{L}^1(S,I)$, alors

$$\begin{aligned}\sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leqslant -h} I(g) &= \sup_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant h} I(-f) = -\inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant h} I(f)\\ = -\sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leqslant h} I(g) &= -\sup_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant -h} I(-f) = \inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant -h} I(f),\end{aligned}$$

où la troisième égalité provient de l'hypothèse $h \in \mathscr{L}^1(S,I)$. On en déduit que $-h \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et $I(-h)=-I(h)$. Par définition, si h est une fonction positive, alors $I(h) \geqslant 0$. Donc $\mathscr{L}^1(S,I)$ est un espace vectoriel qui contient S, et $I : \mathscr{L}^1(S,I) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire positive.

Montrons ensuite que $\mathscr{L}^1(S,I)$ est stable par min. Soient h_1 et h_2 deux fonctions dans $\mathscr{L}^1(S,I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_1, g_2 \in S^{\downarrow}$ et $f_1, f_2 \in S^{\uparrow}$ telles que $g_1 \leqslant h_1 \leqslant f_1$, $g_2 \leqslant h_2 \leqslant f_2$, et que

$$I(g_1),\, I(g_2),\, I(f_1),\, I(f_2) \in \mathbb{R}, \quad I(f_1-g_1) \leqslant \varepsilon/2,\ I(f_2-g_2) \leqslant \varepsilon/2.$$

On a alors $\min(g_1,g_2) \leqslant \min(h_1,h_2) \leqslant \min(f_1,f_2)$, et

$$I(\min(f_1,f_2)-\min(g_1,g_2)) \leqslant I(f_1-g_1)+I(f_2-g_2) \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit $\min(h_1,h_2) \in \mathscr{L}^1(S,I)$. □

***Théorème 4.5* (Beppo Levi).** — *Soit $(h_n)_{n\geqslant 0}$ une suite monotone de fonctions dans $\mathscr{L}^1(S,I)$ qui converge vers une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$. Si la limite de la suite $(I(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un nombre réel, alors on a $h \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et $I(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} I(h_n)$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En outre, quitte à remplacer h_n par $h_n - h_0$, on peut supposer $h_0 = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, soit $f_n \in S^{\uparrow}$ telle que $h_n - h_{n-1} \leqslant f_n$ et $I(h_n - h_{n-1}) \geqslant I(f_n) - \varepsilon/2^n$. On a alors $h_n \leqslant f_1 + \cdots + f_n$ et $I(h_n) \geqslant I(f_1) + \cdots + I(f_n) - \varepsilon$. Soit $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$. On a $f \in S^{\uparrow}$ et $I(f) = \sum_{n\geqslant 1} I(f_n)$. En outre, on a $f \geqslant h$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I(h_n) \geqslant I(f) - \varepsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $g_n \in S^{\downarrow}$ tel que $g_n \leqslant h_n \leqslant h$ et que $I(g_n) \geqslant I(h_n) - \varepsilon/2$. On obtient qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$I(g_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} I(h_n) - \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on obtient $h \in \mathscr{L}^1(S,I)$ et $I(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} I(h_n)$. □

4.3. Application à la théorie d'intégration sur $\mathbb{R}$

Pour appliquer la théorie de Daniell à la construction des intégrales sur $\mathbb{R}$, il reste à montrer que l'espace vectoriel $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{]a,b]}$, $a < b$, satisfait à la propriété de convergence monotone introduite dans la section 4.1, où on considère la forme linéaire positive I de $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie $\mathbb{1}_{]a,b]}$ sur $b - a$.

Rappelons que toute fonction non-nulle f dans $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{]a_i,b_i]},$$

où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, les λ_i sont non-nuls et les intervalles $]a_i, b_i]$ sont deux-à-deux disjoints. On définit le *support* de f comme la réunion des intervalles fermés $[a_i, b_i]$, noté $\mathrm{supp}(f)$. Si de plus f est positive, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction positive f_ε dans S qui satisfait aux condition suivantes :

- $\mathrm{supp}(f_\varepsilon) \subset \{t \in \mathbb{R} | f(t) > 0\}$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou bien $f_\varepsilon(t) = 0$, ou bien $f_\varepsilon(t) = f(t)$,
- $I(f_\varepsilon) \geqslant I(f) - \varepsilon$.

En effet, il suffit de choisir des éléments $a'_i \in]a_i, b_i]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(a'_i - a_i) < \varepsilon$ et prendre $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{]a'_i,b_i]}$.

Si f est la fonction nulle, le support de f est défini comme $\varnothing$ par convention.

Théorème 4.6. — *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction nulle, alors $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On écrit f_n comme la somme de deux fonctions positives g_n et h_n dans $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ avec

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{si } f_n(t) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{si } f_n(t) < \varepsilon, \end{cases} \qquad h_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } f_n(t) \geqslant \varepsilon, \\ f_n(t), & \text{si } f_n(t) < \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $]a, b]$ un intervalle qui contient $\{t \in \mathbb{R} \,|\, f_0(t) > 0\}$. On a $h_n \leqslant \varepsilon \mathbb{1}_{]a,b]}$ et donc $I(h_n) \leqslant \varepsilon(b - a)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction positive $\widetilde{g}_n \in L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{supp}(\widetilde{g}_n) \subset \{x \in \mathbb{R} \,|\, g_n(x) > 0\}, \quad I(\widetilde{g}_n) \geqslant I(g_n) - \varepsilon/2^n$$

et $\widetilde{g}_n(t) = g_n(t)$ dès que $\widetilde{g}_n(t) > 0$. Soient en outre $\varphi_n = \min(\widetilde{g}_0, \ldots, \widetilde{g}_n)$. On a $\varphi_0 \geqslant \varphi_1 \geqslant \ldots$, et donc $\mathrm{supp}(\varphi_0) \supset \mathrm{supp}(\varphi_1) \supset \ldots$. En outre, on a $0 \leqslant \varphi_n \leqslant g_n$, et $\varphi_n(t) \geqslant \varepsilon$ dès que $\varphi_n(t) > 0$. Montrons par absurde que φ_n réduit à la fonction nulle lorsque n est assez positif. Si ce n'est pas le cas, alors $\mathrm{supp}(\varphi_n)$ est non-vide pour tout $n \in \mathbb{N}$. On désigne par x_n l'élément maximal de $\mathrm{supp}(\varphi_n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est contenue dans $]a, b]$, donc converge vers un point $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N},\, n\geqslant N}$ est contenue dans $\mathrm{supp}(\varphi_N)$, qui est une réunion d'un

nombre fini d'intervalles fermés, on obtient que x appartient à $\mathrm{supp}(\varphi_N) \subset \mathrm{supp}(\widetilde{g}_n)$. En particulier, on a $g_n(x) > 0$ et donc $g_n(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela est absurd car $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_N = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I(\widetilde{g}_n - \varphi_n) = I(\widetilde{g}_n - \min(\varphi_{n-1}, \widetilde{g}_n)) \leqslant I(g_{n-1} - \min(\varphi_{n-1}, g_{n-1})) = I(g_{n-1} - \varphi_{n-1}),$$

où l'inégalité provient des relations $\widetilde{g}_n \leqslant g_n \leqslant g_{n-1}$. On en déduit

$$I(g_n - \varphi_n) \leqslant I(g_{n-1} - \varphi_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

qui implique que $I(g_n - \varphi_n) \leqslant \sum_{j=0}^{n} \varepsilon/2^j < 2\varepsilon$. En particulier, on a $I(g_n) < 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} I(f_n) \leqslant \varepsilon(b - a + 2).$$

Comme ε est arbitraire, on obtient le résultat.

□

4.4. Fonctions négligeables

Soit h une fonctions réelle sur Ω. On dit que f est *négligeable* si $h \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et si $I(|h|) = 0$. On dit qu'un sous-ensemble A de S est *négligeable* si $\mathbb{1}_A$ est une fonction négligeable. Les fonctions négligeables forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1(S, I)$ que l'on note $\mathrm{Neg}(S, I)$.

Proposition 4.7. — *Soient h_1 et h_2 deux fonctions réelles sur Ω telles que $|h_2| \leqslant h_1$. Si la fonction h_1 est négligeable, alors il en est de même de h_2.*

Démonstration. — Par définition on a $\inf\limits_{f\in S^{\downarrow},\, f\geqslant h_1} I(f) = 0$, d'où $\inf\limits_{f\in S^{\downarrow},\, f\geqslant h_2} I(f) = 0$. On en déduit que $h_2 \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et $I(h_2) = 0$. □

Corollaire 4.8. — *Soit A un sous-ensemble négligeable de Ω. Tout sous-ensemble de A est aussi négligeable.*

Démonstration. — Soit B un sous-ensemble de A. On a $|\mathbb{1}_B| = \mathbb{1}_B \leqslant \mathbb{1}_A$. □

Corollaire 4.9. — *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω. Si chaque A_n est un ensemble négligeable, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un ensemble négligeable.*

Démonstration. — Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. On a $\mathbb{1}_{B_N} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{A_n}$ et donc B_N est négligeable. Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. La suite $(\mathbb{1}_{B_N})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\mathbb{1}_A$. D'après le théorème 4.5 on obtient que $\mathbb{1}_A \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et que $I(\mathbb{1}_A) = 0$, d'où A est négligeable. □

Proposition 4.10. — *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. La fonction f est négligeable si et seulement si $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ est un ensemble négligeable.*

Démonstration. — On suppose que f est une fonction négligeable. Pour tout entier n, soit $A_n = \{x \in \Omega \,|\, |f(x)| \leqslant n\}$. On a alors $n\mathbb{1}_{A_n} \leqslant |f|$ et donc $\mathbb{1}_{A_n}$ est négligeable (d'après le corollaire 4.7). On en déduit que $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est négligeable.

Réciproquement, on suppose que $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ est négligeable. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $B_n := \{x \in \Omega : n < |f(x)| \leqslant n+1\}$. Comme $B_n \subset \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$, l'ensemble B_n est négligeable. D'après le théorème 4.5, on obtient que $g = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\mathbb{1}_{B_n}$ est une fonction négligeable. Comme $0 \leqslant |f| \leqslant g$, on obtient que f est une fonction négligeable (d'après la proposition 4.7). □

Définition 4.11. — Soit $\mathbb{P}(\cdot)$ un énoncé qui dépend d'un paramètre dans Ω. On dit que $\mathbb{P}$ est satisfait presque partout s'il existe un ensemble négligeable $A \subset \Omega$ tel que l'énoncé $\mathbb{P}(x)$ est vrai pour tout $x \in \Omega \setminus A$.

4.5. Convergence dominée

Il s'avère que l'espace $\mathscr{L}^1(S, I)$ satisfait à la propriété de convergence dominée, similairement aux résultats classique de la théorie des mesures. Cela provient formellement de la propriété de convergence monotone comme suit.

***Théorème 4.12* (Fatou).** — *Soit $(h_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions positives dans $\mathscr{L}^1(S, I)$. Si $\liminf\limits_{n\to+\infty} I(f_n) < +\infty$, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n \in \mathscr{L}^1(S, I)$, et on a*

$$I\Big(\liminf_{n\to+\infty} f_n\Big) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} I(f_n).$$

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = \inf_{m\geqslant n} f_m = \lim_{k\to+\infty} \min(f_n, \ldots, f_{n+k})$. C'est la limite d'une décroissante dans $\mathscr{L}^1(S, I)$. En outre, on a

$$I(\min(f_n, \ldots, f_{n+k})) \geqslant 0.$$

D'après le théorème de Beppo Levi, on a $g_n \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et

$$I(g_n) = \lim_{k\to+\infty} I(\min(f_n, \ldots, f_{n+k})) \leqslant I(f_n).$$

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} I(g_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} I(f_n)$. Comme la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\liminf\limits_{n\to+\infty} I(f_n) < +\infty$, encore d'après le théorème de Beppo Levi, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathscr{L}^1(S, I), \text{ et } I\Big(\liminf_{n\to+\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} I(g_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} I(f_n).$$

□

***Théorème 4.13* (Convergence dominée).** — *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathscr{L}^1(S, I)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f presque partout. S'il existe $g \in \mathscr{L}^1(S, I)$ telle que $|f_n| \leqslant g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et $I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$.*

Démonstration. — Quitte à modifier les fonctions f_n sur un ensemble négligeable, on peut supposer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

On applique le théorème de Fatou aux suites $(g - f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g + f_n)_{n\geqslant 0}$ pour obtenir $f \in \mathscr{L}^1(S, I)$ et

$$I(g-f) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} I(g-f_n) = I(g) - \limsup_{n\to+\infty} I(f_n),$$
$$I(g+f) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} I(g+f_n) = I(g) + \liminf_{n\to+\infty} I(f_n).$$

On obtient alors $\liminf_{n\to+\infty} I(f_n) \geqslant I(f) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} I(f_n)$. Donc la suite $(I(f_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $I(f)$. □

Proposition 4.14. — *Soient X un espace métrique, $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ une fonction et $y \in X$. On suppose que*

(1) pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $f(\omega, \cdot)$ est continue en x_0 ;

(2) pour tout élément $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x) : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable ;

(3) il existe une fonction intégrable telle que $|f(\omega, x)| \leqslant g(\omega)$ pour tout $(\omega, x) \in \Omega\times X$.

Alors la fonction de X dans $\mathbb{R}$ qui envoie $x \in X$ sur $I(f(\cdot, x))$ est continue en y.

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers y. La suite de fonctions $(f_n := f(\cdot, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(\cdot, y)$. Cette suite est en outre dominée par g. Donc $I(f_n)$ converge vers $I(f)$. □

Proposition 4.15. — *Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : \Omega\times]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $f(\omega, \cdot)$ est dérivable sur $]a, b[$, dont la dérivée est notée $h(\omega, \cdot)$. On suppose que*

(1) pour tout $x \in]a, b[$, les fonctions $f(\cdot, x)$ et $g(\cdot, x)$ sur Ω sont intégrables ;

(2) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, (\omega, x) \in \Omega\times]a, b[\,, \quad |h(\omega, x)| \leqslant g(\omega).$$

Alors la fonction $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ qui envoie $x \in]a, b[$ sur $I(f(\cdot, x))$ est dérivable, dont la dérivée est égale à la fonction $H :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto I(h(\cdot, x))$.

Démonstration. — Soit y un élément de $]a, b[$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $]a, b[\setminus\{y\}$ qui converge vers y. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\Big|\frac{f(\omega, x_n) - f(\omega, y)}{x_n - y}\Big| \leqslant g(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(\omega, x_n) - f(\omega, y)}{x_n - y} = h(\omega, y)$$

D'après le théorème de convergence dominée, on obtient le résultat. □