CHAPITRE 5

ENDOMORPHISMES AUTO-ADJOINTS ET AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Dans ce chapitre, k désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe en outre un espace vectoriel E de rang fini sur k, muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle$.

5.1. Endomorphisme auto-adjoint

Définition 5.1. — Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On dit qu'un endomorphisme f^* est *adjoint* à φ si pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a

$$\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle. \tag{5.1}$$

Il s'avère que tout endomorphisme de V admet un unique endomorphisme adjoint. Si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de V, alors la matrice de f^* sous cette base est la conjuguée-transposée de celle de f (sous la même base). On dit que l'endomorphisme f est auto-adjoint si $f^* = f$.

Lemme 5.2. — *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme auto-adjoint de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Démonstration. — Soit x un vecteur dans $F^\perp$. Pour tout $y \in F$ on a $\langle x, y\rangle = 0$, d'où

$$\forall\, y \in F, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = 0,$$

d'où $f(x) \in F^\perp$. □

Proposition 5.3. — *Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors il existe une base orthonormée de E qui consiste de vecteurs propres de l'endomorphisme f. En outre, toutes les valeurs propres de f sont réelles.*

Démonstration. — Le résultat est trivial lorsque E est l'espace vectoriel nul. Dans la suite, on suppose que E est non-nul. Pour tout $x \in E$, on a

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle f(x), x\rangle = \overline{\langle x, f(x)\rangle}.$$

Donc $\langle x, f(x)\rangle \in \mathbb{R}$.

Soit S l'ensemble $\{x \in E \,:\, \|x\| = 1\}$. On considère la fonction $(x \in S) \to \langle x, f(x)\rangle$. Cette fonction est continue et donc atteint son maximum $\lambda_{\max}$ à un point $x \in S$. Soit y un autre point de S. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x + ty, f(x + ty)\rangle \leqslant \lambda_{\max}\|x + ty\|^2,$$

d'où

$$\langle x, f(x)\rangle + 2t\mathrm{Re}\langle x, f(y)\rangle + t^2\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_{\max}(\|x\|^2 + 2t\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2)$$

et donc

$$2\mathrm{Re}\langle x, f(y)\rangle + t\langle y, f(y)\rangle \leqslant \lambda_{\max}(2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + t\|y\|^2).$$

On obtient donc

$$\mathrm{Re}\langle x, f(y)\rangle \leqslant \lambda_{\max}\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

En remplaçant y par $-y$, on obtient l'inégalité au sens inverse. Donc

$$\mathrm{Re}\langle f(x), y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, f(y)\rangle = \lambda_{\max}\mathrm{Re}\langle x, y\rangle,$$

où la première égalité provient de l'hypothèse que f est auto-adjoint. Comme y est arbitraire, on obtient $f(x) = \lambda_{\max}x$.

Par le lemme précédent, l'espace vectoriel $(kx)^\perp$ est stable par f. De plus, la restriction de f à cet espace vectoriel est encore auto-adjoint. Par récurrence on obtient donc le résultat. □

Proposition 5.4. — *Soit F un sous-espace vectoriel de E. La projection orthogonale $p_F : E \to F \subset E$ est auto-adjoint.*

Démonstration. — Soient x et y deux éléments de E. On a

$$\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), y\rangle.$$

□

5.2. Automorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, on suppose que $k = \mathbb{R}$.

Définition 5.5. — On dit qu'un automorphisme $f : E \to E$ is *orthogonal* si

$$\forall\,(x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

ou de façon équivalent $f^* = f^{-1}$.

Proposition 5.6. — *Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrique orthogonale s_F est un automorphisme orthogonal.*

Démonstration. — L'endomorphisme p_F étant auto-adjoint, s_F l'est aussi. En outre, on a $s_F^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc s_F est un automorphisme orthogonal. □

Proposition 5.7. — *Soit $f : E \to E$ un automorphisme orthogonal. Si $H = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un hyperplan, alors f est la symétrique orthogonale par rapport à H.*

Démonstration. — Soit x un vecteur de norme 1 qui est orthogonal par rapport à H. Comme f préserve le produit scalaire et $f(y) = y$ pour tout $y \in H$, on obtient que $f(x)$ est orthogonal à H et est de norme 1, d'où $f(x) = -x$. Le résultat est donc démontré. □

5.3. Orthogonal group

On désigne par $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. C'est un groupe. Soit $\mathrm{O}(E)$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes orthogonaux.

Proposition 5.8. — *Le sous-ensemble $\mathrm{O}(E)$ de $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe.*

Démonstration. — Si f et g sont deux éléments dans $\mathrm{O}(E)$, alors on a

$$(g \circ f)^* \circ (g \circ f) = (f^* \circ g^*) \circ (g \circ f) = f^* \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

En outre, si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors

$$f^{**} \circ f^* = f \circ f^* = \mathrm{Id}_E\,.$$

Donc $\mathrm{O}(E, \phi)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. □

Si f est un automorphisme orthogonal, alors

$$1 = \text{dét}(\mathrm{Id}_E) = \text{dét}(f^* \circ f) = \text{dét}(f)^2.$$

Donc $\text{dét}(f) = 1$ or -1. On désigne par $\mathrm{SO}(E)$ le sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux f tels que $\text{dét}(f) = 1$. Soit $\mathrm{O}^-(E) = \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$.

Proposition 5.9. — *L'ensemble $\mathrm{O}^-(E)$ contient toutes les symétriques par rapport aux hyperplanes.*

Démonstration. — Soient H une hyperplane et x un élément de E orthogonal à H. Soit $\boldsymbol{e}$ une base de H. Alors la base de s_H sous la base $\{x\} \cup \boldsymbol{e}$ est $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Donc $\text{dét}(s_{H_x}) = -1$. □

Définition 5.10. — On appelle *réflexion* toute symétrique orthogonale par rapport à une hyperplane dans E.

Théorème 5.11 **(Cartan-Dieudonné)**. — *Tout endomorphisme symétrique $f : E \to E$ s'écrit comme la composition d'au plus r réflexions, où r est le rang de E. En particulier, le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r. Le cas où $r = 0$ est trivial. Dans la suite on suppose que le résultat est démontré pour les espace vectoriel de dimension $< r$.

Premier cas : On suppose qu'il existe un $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = x$. Soit $H = \{x\}^\perp$. Pour tout $y \in H$ on a

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0.$$

Donc H est invariant par f. Par l'hypothèse de récurrence, il existe des réflexions $s_1, \ldots, s_n$ (avec $n \in \{0, \ldots, r-1\}$) dans $O(H)$ telles que

$$f|_H = s_1 \circ \cdots \circ s_n$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\widetilde{s}_i : E \to E$ prolongeant s_i et telle que $\widetilde{s}_i(x) = x$. On a

$$\mathrm{Ker}(\widetilde{s}_i - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s_i - \mathrm{Id}_H) \oplus kx.$$

Donc $\widetilde{s}_i$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) sont des réflexions. En outre, on a

$$f = \widetilde{s}_1 \circ \cdots \circ \widetilde{s}_n$$

comme x est invariant par $\widetilde{s}_i$ et par f.

Second cas : On suppose que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Soient $x \in E \setminus \{0\}$, $y = x - f(x)$ et $H = \{y\}^\perp$. On a

$$\langle x + f(x), x - f(x)\rangle = \langle x, x\rangle - \langle f(x), f(x)\rangle = 0,$$

d'où $x + f(x) \in H$. On obtient donc

$$s_H(f(x)) = \frac{1}{2}(s_H(x + f(x)) - s_H(y)) = \frac{1}{2}(x + f(x) - y) = x$$

et

$$x + f(x) = s_H(x + f(x)) = s_H(x) + s_H(f(x)) = x + s_H(x).$$

On obtient donc que s_H exchange x et $f(x)$ et donc $s_H \circ f$ est tombé dans le premier cas. Il existe donc des réflexions $s_1, \ldots, s_n$ avec $n \leqslant r-1$ telles que $s_H f = s_1 \circ \cdots \circ s_n$. On obtient donc $f = s_H \circ s_1 \circ \cdots \circ s_n$. $\square$