CHAPITRE 7

FONCTIONS DEUX FOIS DIFFÉRENTIABLES, EXTRÉMA

On fixe dans ce chapitre un espace vectoriel normé de rang fini $(E, \|\cdot\|)$.

7.1. Fonctions deux fois différentiables

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U. On suppose que f est différentiable en un point $x \in U$. On dit que f est *deux fois différentiable* s'il existe une forme bilinéaire symétrique $D^2 f(x)$ sur E telle que

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2} H_f(x)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

La forme bilinéaire $H_f(x)$ est appelée la *hessienne* de f en x.

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si, pour tout $x \in U$, la hessienne $H_f(x)$ existe et H_f définit une application continue de U dans l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E, on dit que la fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^2$ sur U.

Proposition 7.1. — *Soient U un ouvert de E et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour tout couple (h_1, h_2) d'éléments dans E, on a*

$$\forall\, x \in U, \quad H_f(x)(h_1, h_2) = (\partial_{h_1} \partial_{h_2} f)(x).$$

Démonstration. — On fixe un point $x \in U$. Soient $\varphi = Df(x)$ et $b = H_f(x)$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme

$$\forall\, y \in U, \quad g(y) := f(y) - f(x) - \varphi(y-x) - \frac{1}{2} b(y-x, y-x).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car f l'est. En outre, on a

$$g(y) = o(\|y-x\|^2).$$

En particulier, on a $\partial_{h_2} g(y) = o(\|y-x\|)$. Cela montre que $(\partial_{h_1} \partial_{h_2} g)(x) = 0$. Un calcul direct montre que

$$\partial_{h_2} g(y) = \partial_{h_2} f(y) - \varphi(y-x) - b(y-x, h_2).$$

Comme $\partial_{h_2} g$ est dérivable en x le long de h_1, il en est de même de $\partial_{h_2} f$, et on a

$$0 = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} g)(x) = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} f)(x) - \varphi(x-x) - b(h_1,h_2) = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} f)(x) - b(h_1,h_2),$$

d'où le résultat. □

Proposition 7.2. — *Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si Df est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$. En outre, on a*

$$H_f(x)(h,h) = D^2 f(x)(h)(h)$$

pour tout $x \in U$ et $h \in E$.

Démonstration. — Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, Df définit une application continue de U dans $E^\vee$. En outre, on a

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th)(h)dt.$$

Comme Df est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$Df(x+th) = Df(x) + tD^2 f(x)(h) + o(\|h\|).$$

Donc

$$f(x+h) - f(x) = Df(x) + \frac{1}{2}D^2 f(x)(h)(h) + o(\|h\|^2),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 7.3. — *Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base de E. Si pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,r\}^2$, la fonction $\partial_{e_i}\partial_{e_j} f$ est bien définie et est une fonction continue sur U, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$. En outre, $((\partial_{e_i}\partial_{e_j} f)(x))_{(i,j)\in\{1,\dots,r\}^2}$ est la matrice de la forme bilinéaire $H_f(x)$ par rapport à la base $(e_i)_{i=1}^r$.*

7.2. Étude locale des fonctions deux fois différentiables

Soient U un sous-ensemble non-vide de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in A$ est un *point de maximum* (resp. *point de minimum*) de f si on a $f(a) \geqslant f(x)$ (resp. $f(a) \leqslant f(x)$) pour tout $x \in A$. On dit que $a \in A$ est un *point de maximum local* (resp. *point de minimum local*) s'il existe un voisinage V de a tel que a soit un point de maximum (resp. point de minimum) de $f|_{A\cap V}$.

Proposition 7.4. — *Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de E. Si $P \in U$ est un point de maximum ou minimum local et si f est différentiable en P, alors on a $Df(P) = 0$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que P est un point de maximum local. Soit $h \in E$. Pour $t > 0$ assez proche de 0, on a $f(P + th) \leqslant f(P)$. Donc

$$\partial_h f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + th) - f(P)}{t} \leqslant 0.$$

Par la même raison (pour $t < 0$), on obtient $\partial_h f(P) \geqslant 0$. Cela montre que $Df(P)(h) = \partial_h f(P) = 0$. □

Définition 7.5. — Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de E. On dit qu'un point $P \in U$ est un *point critique* de f si f est différentiable en P et si $Df(P) = 0$.

Théorème 7.6. — *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. Soit P un point critique de f. On suppose que la fonction f est deux fois différentiable en P et que $H_f(P)$ (resp. $-H_f(P)$) est définie positive, alors P est un point de minimum (resp. maximum) local.*

Démonstration. — On suppose que $H_f(P)$ est définie positive. Comme $Df(P) = 0$ on a

$$f(P + h) - f(P) = H_f(P)(h, h) + o(\|h\|).$$

Comme $H_f(P)$ est définie positive, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|H_f(P)(h, h)\| \geqslant \varepsilon \|h\|^2.$$

Donc $f(P + h) - f(P) \geqslant 0$ pour $\|h\|$ assez petit. □