Université Paris Diderot
M2 Algèbre homologique et théorie des faisceaux

Examen du 31 octobre 2016
9h30-12h30, Sophie Germain, salle 2011

Les documents sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 30\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Partie I : généralités

On désigne par **Ab** la catégorie des groupes abéliens. C'est une catégorie abélienne.

Rappelons qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre les catégories abéliennes est dit *additif* si, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{A}$, l'application $\mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(F(X), F(Y))$ qui envoie $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ sur $F(f)$ est un morphisme de groupes. On dit qu'un foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est *exact* s'il préserve les suites exactes. Autrement dit, pour toute suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \mathbf{0}$$

dans $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une suite exacte dans $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. On dit qu'un objet I de $\mathcal{C}$ est *injectif* si le foncteur $\mathcal{C}(-, I) : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Ab}$ est exact. En d'autres termes, pour toute suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbf{0}$$

de morphismes dans $\mathcal{C}$, le foncteur $\mathcal{C}(-, I)$ induit une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}(Z, I) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, I) \longrightarrow \mathcal{C}(X, I) \longrightarrow \mathbf{0}\ .$$

Dualement, on dit qu'un objet P de $\mathcal{C}$ est *projectif* si le foncteur $\mathcal{C}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ est exact. En d'autres termes, $\mathcal{C}(P, -)$ transforme toute suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

de morphismes dans $\mathcal{C}$ en une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}(P, X) \longrightarrow \mathcal{C}(P, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(P, Z) \longrightarrow \mathbf{0}\ .$$

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Montrer qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est projectif si et seulement si, vu comme un objet de la catégorie opposée $\mathcal{C}^\circ$, X est un objet injectif.

2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Montrer qu'un objet P de $\mathcal{C}$ est projectif si et seulement si, pour tout épimorphisme $\pi : X \to Y$ et tout morphisme $f : P \to Y$, il existe un morphisme $g : P \to X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif (c'est-à-dire $f = \pi g$)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "\pi"'] & Y \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

3. Soient $(P_i)_{i\in\Theta}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. On suppose que le coproduit des P_i existe et on désigne par P le coproduit $\coprod_{i\in\Theta} P_i$. Montrer que P est un objet projectif si et seulement si, pour tout $i \in \Theta$, l'objet P_i est projectif. Que peut-on déduire par passage à la catégorie opposée ?

4. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif qui est adjoint à droite d'un foncteur exact $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Montrer que, si I est un objet injectif de $\mathcal{A}$, alors $F(I)$ est un objet injectif de $\mathcal{B}$. Que peut-on déduire par passage aux catégories opposées ?

5. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$ la catégorie des complexes de cochaînes dans $\mathcal{A}$. Soit $u : A \to B$ un morphisme de complexes dans $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. On désigne par $\mathrm{cyl}(u)$ le complexe de cochaînes dont le terme d'indice n est $A_n \oplus A_{n+1} \oplus B_n$ et dont le $n^{\text{ième}}$ morphisme de cobord est déterminé par la matrice

$$\begin{pmatrix} d_n^A & 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & -d_{n+1}^A & 0 \\ 0 & -u_{n+1} & d_n^B \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\mathrm{cyl}(u)$ est bien un complexe de cochaînes, et que les morphismes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{B_n} \end{pmatrix} : B_n \to A_n \oplus A_{n+1} \oplus B_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

définissent un morphisme de complexes de B vers $\mathrm{cyl}(u)$, qui est une équivalence d'homotopie dont l'inverse dans la catégorie homotopique $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}$ est donnée par la classe du morphisme de complexes $(u_n, 0, 1_{B_n}) : A_n \oplus A_{n+1} \oplus B_n \to B_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$ la catégorie des complexes de cochaînes dans$\mathcal{A}$. Soit

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

une suite exacte dans la catégorie des complexes $\mathbf{Com}_{\mathcal{A}}$. Montrer que les

$$(0, v_n) : A_{n+1} \oplus B_n \longrightarrow C_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

définissent un morphisme φ de complexes du cône de u vers C.

7. On garde les notations de la question précédente. Montrer que φ est un quasi-isomorphisme et en déduire que l'on peut inscrire $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ dans un triangle distingué

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$$

dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}$. (*Indication : On peut établir une suite exacte*

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{cyl}(u) \longrightarrow \mathrm{cône}(u) \longrightarrow \mathbf{0}$$

dans la catégorie des complexes).

8. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dans la catégorie $\mathbf{Ab}$, où v est la projection canonique et u est l'application d'inclusion de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Montrer que, vu comme une suite exacte de complexes de cochaînes (concentrés à la position d'indice 0), on ne peut pas inscrire le diagramme

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

dans un triangle distingué dans la catégorie homotopique $\mathbf{K}_{\mathbf{Ab}}$.

Partie II : groupes abéliens injectifs

Dans cette partie, on étudie les objets injectifs dans la catégorie des groupes abéliens. On désigne par $\mathbf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens.

9. On dit qu'un groupe abélien $(G, +)$ est *divisible* s'il satisfait à la propriété suivante : pour tout entier n, $n \geqslant 1$, et tout élément $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que

$$ny := \underbrace{y + \cdots + y}_{n \text{ copies}} = x.$$

Montrer que tout groupe abélien divisible est un objet injectif dans la catégorie $\mathbf{Ab}$. (*Indication : on peut utiliser le lemme de Zorn*). En déduire que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ est un objet injectif dans la catégorie $\mathbf{Ab}$.

10. Soit G un groupe abélien. Montrer que l'application

$$G \longmapsto \prod_{f \in \mathbf{Ab}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad x \longmapsto (f(x))_{f \in \mathbf{Ab}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

est un monomorphisme dans $\mathbf{Ab}$. En déduire que la catégorie $\mathbf{Ab}$ admet suffisamment d'objets injectifs.

Partie III : modules projectifs et modules injectifs

On fixe dans cette partie un anneau commutatif et unifère k et on désigne par k-**Mod** la catégorie des k-modules. Si M et M' sont deux k-modules, on désigne par $\mathrm{Hom}_k(M, M')$ l'ensemble des homomorphismes de k-modules de M dans M'. On rappelle que k-**Mod** est une catégorie abélienne. On désigne encore par **Ab** la catégorie des groupes abéliens.

11. Montrer que le foncteur d'oubli de k-**Mod** dans la catégorie **Ens** des ensembles admet un adjoint à gauche, qui envoie tout ensemble S sur le k-module libre engendré par S.

12. Montrer que, tout k-module libre est un objet projectif de k-**Mod**. En déduire que, pour tout k-module M, il existe un k-module projectif P et un épimorphisme $P \to M$ dans la catégorie k-**Mod**.

13. Montrer que le foncteur d'oubli de k-**Mod** dans **Ab** qui envoie tout k-module M sur son groupe additif sous-jacent, admet un adjoint à droite. Déterminer ce foncteur adjoint à droite.

14. Montrer que $I_k := \mathbf{Ab}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est naturellement muni d'une structure de k-module et est un objet injectif dans la catégorie k-**Mod**.

15. Soit M un k-module. Construire un homomorphisme de k-modules

$$M \longrightarrow \prod_{f \in \mathrm{Hom}_k(M, I_k)} I_k$$

qui est un monomorphisme dans k-**Mod**. En déduire que la catégorie k-**Mod** admet suffisamment d'objets injectifs.

Partie IV : catégorie des faisceaux abéliens

Pour tout espace topologique X, on désigne par $\mathbf{PFai}_X$ la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur X, qui est la catégorie des foncteurs de l'ensemble des parties ouvertes de X muni de la relation d'ordre d'inclusion $\supset$ (vu comme une catégorie) dans la catégorie **Ab** des groupes abéliens. Soit $\mathbf{Fai}_X$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PFai}_X$ des faisceaux en groupes abéliens sur X. On rappelle que ces catégories sont abéliennes. On désigne par $\Gamma : \mathbf{Fai}_X \to \mathbf{Ab}$ le foncteur de sections globales qui envoie tout faisceau $F \in \mathbf{Fai}_X$ sur le groupe abélien $F(X)$. C'est un foncteur additif.

Soient X et Y des espaces topologiques et $\varphi : X \to Y$ une application continue. On désigne par $\varphi_* : \mathbf{Fai}_X \to \mathbf{Fai}_Y$ le foncteur qui envoie $F \in \mathbf{Fai}_X$ sur le faisceau $\varphi_* F \in \mathbf{Fai}_Y$ tel que $\varphi_* F(U) = F(\varphi^{-1}(U))$ pour tout sous-ensemble ouvert U de Y. On rappelle que le foncteur φ_* admet un adjoint à gauche $\varphi^{-1} : \mathbf{Fai}_Y \to \mathbf{Fai}_X$. On admet que les foncteurs φ_* et φ^{-1} sont additifs.

Si X est un espace topologique, $x \in X$ et F est un faisceau en groupes abélien sur X, on désigne par F_x le faisceau $j_x^{-1} F$, où $j_x : \{x\} \to X$ est l'application d'inclusion. Le faisceau F_x est uniquement déterminé par son espace de sections globales $\Gamma(F_x)$. On peut

donc le considérer comme un groupe abélien. La catégorie $\mathbf{Fai}_{\{x\}}$ est en fait équivalente à la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens.

16. Soit X un espace topologique, $f : F \to G$ un morphisme dans $\mathbf{Fai}_X$. Montrer que le noyau de f dans la catégorie $\mathbf{PFai}_X$ s'identifie à son noyau dans la catégorie des faisceaux $\mathbf{Fai}_X$. Montrer que, si G' est le conoyau de f dans la catégorie $\mathbf{PFai}_X$, alors le faisceau associé à G' est le conoyau de f dans la catégorie des faisceaux $\mathbf{Fai}_X$.

17. Soient X et Y deux espaces topologiques, et $\varphi : X \to Y$ une application continue. Expliquer brièvement pourquoi le foncteur φ^{-1} est exact.

18. Soient X et Y deux espaces topologiques, et $\varphi : X \to Y$ une application continue. Montrer que, si F est un objet injectif dans $\mathbf{Fai}_X$, alors $\varphi_* F$ est un objet injectif dans $\mathbf{Fai}_Y$.

19. Soient X un espace topologique et F un faisceau en groupes abéliens sur X. Montrer que, si F_x est nul pour tout point $x \in X$, alors F est l'objet nul dans la catégorie $\mathbf{Fai}_X$.

20. Soient X un espace topologique et F un faisceau en groupes abéliens sur X. Montrer que le morphisme canonique

$$F \longrightarrow \prod_{x \in X} j_{x*} j_x^{-1} F$$

est un monomorphisme, où $j_x : \{x\} \to X$ est l'application d'inclusion. Expliquer d'abord la construction de ce morphisme canonique.

21. En déduire que la catégorie $\mathbf{Fai}_X$ admet suffisamment d'objets injectifs.

Partie V : cohomologie des faisceaux abéliens

Soient X un espace topologique. On désigne par $\mathbf{D}_X^+$ la catégorie dérivée (bornée à gauche) de la catégorie des faisceaux $\mathbf{Fai}_X$ et par $\mathbf{D}_{\mathbf{Ab}}$ la catégorie dérivée de la catégorie des groupes abéliens. Les résultats obtenus dans la partie IV montrent que le foncteur dérivé $R\Gamma : \mathbf{D}_X^+ \to \mathbf{D}_{\mathbf{Ab}}$ du foncteur Γ est bien défini. Si F est un faisceau en groupes abéliens sur X, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^n(X, F)$ la $n^{\text{ième}}$ cohomologie du complexe $R\Gamma(F)$, où on considère F comme un complexe concentré à la position d'indice 0. On obtient ainsi une famille de foncteurs $H^n(X, -) : \mathbf{Fai}_X \to \mathbf{Ab}$.

22. Montrer que le foncteur Γ est exact à gauche. En d'autres termes, pour toute suite exacte $\mathbf{0} \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow \mathbf{0}$ de faisceaux en groupes abéliens sur X, la suite $0 \longrightarrow \Gamma(F') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(F) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(F'')$ est exacte.

23. En déduire que le foncteur $H^0(X, -)$ est isomorphe à Γ.

24. Montrer que, si

$$\mathbf{0} \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur X, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(F') \longrightarrow \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(F'') \longrightarrow H^1(X, F') \longrightarrow H^1(X, F) \longrightarrow H^1(X, F'') \longrightarrow \cdots$$

Partie VI : faisceaux flasques

Dans cette partie, on fixe un espace topologique X. On dit qu'un faisceau en groupes abéliens F sur X est *flasque* si, pour tout sous-ensemble ouvert U de X, l'application de restriction $F(X) \to F(U)$ est un épimorphisme dans la catégorie **Ab** des groupes abéliens.

25. Montrer que, si

$$\mathbf{0} \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur X, où F' est un faisceau flasque, alors, pour tout sous-ensemble ouvert U de X, la suite

$$\mathbf{0} \longrightarrow F'(U) \xrightarrow{f(U)} F(U) \xrightarrow{g(U)} F''(U) \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exacte. On peut utiliser le lemme de Zorn pour relever un élément de $F''(U)$ à un élément de $F(U)$.

26. En déduire que, si $\mathbf{0} \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow \mathbf{0}$ est une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur X avec F' et F flasques, alors F'' est un faisceau flasque.

27. Montrer que, si

$$\mathbf{0} \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow \cdots$$

est un complexe exact de faisceaux en groupes abéliens sur X où les faisceaux F_n sont flasques ($n \in \mathbb{N}$), alors il induit une suite exacte en groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \Gamma(F_0) \longrightarrow \Gamma(F_1) \longrightarrow \cdots.$$

28. Pour tout faisceau F en groupes abéliens sur X, on désigne par $\mathscr{C}^0(F)$ le préfaisceau en groupes abéliens sur X qui envoie tout sous-ensemble ouvert U de X sur le groupe

$$\prod_{x \in U} F_x.$$

Montrer que $\mathscr{C}^0(F)$ est un faisceau flasque sur X et que le morphisme canonique $F \to \mathscr{C}^0(F)$ est un monomorphisme.

29. Soit F un faisceau en groupes abéliens sur X. Montrer que F s'inscrit dans une suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow F \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \cdots$$

où les F_n sont des faisceaux flasques ($n \in \mathbb{N}$) et que $H^n(X, F)$ est isomorphe à la $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow \Gamma(F_0) \longrightarrow \Gamma(F_1) \longrightarrow \Gamma(F_1) \longrightarrow \cdots.$$

30. En déduire que, si F est un faisceau en groupes abéliens flasque, alors $H^n(X, F) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Fin de l'épreuve