Université Paris Diderot
M2 Théorie des schémas

Examen du 3 janvier 2017
12h-15h, Sophie Germain, salle 2012

Les documents sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercice, vue comme une fonction du numéro d'exercice, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 30\}$, $i < j$, l'énoncé de l'exercice numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à l'exercice numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions. Les trois premières parties sont indépendantes.*

Soit S un schéma. On appelle *S-schéma* tout morphisme de schémas de la forme $X \to S$. Si $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ sont deux S-schémas, on appelle *morphisme de S-schémas* de f vers g (ou *S-morphisme de X vers Y*) tout morphisme de schémas $\varphi : X \to Y$ tel que $f = g\varphi$. On désigne par $\mathbf{Sch}_{/S}$ la catégorie des S-schémas. Si $f : X \to S$ est un morphisme de schémas. On appelle *section* de f tout morphisme de schémas $e : S \to X$ tel que $fe = 1_S$ (i.e. e est un S-morphisme de 1_S vers f).

Dans l'épreuve, les notations **Gp**, **Ab** et **Ens** désignent les catégories des groupes, des groupes abéliens et des ensembles, respectivement.

Partie I : schémas en groupes

On désigne par $\varpi : \mathbf{Gp} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout groupe sur son ensemble sous-jacent. Soit S un schéma. On appelle *préfaisceau en groupes* sur $\mathbf{Sch}_{/S}$ tout foncteur de $\mathbf{Sch}^{\circ}_{/S}$ dans $\mathbf{Gp}$. Soit $F : \mathbf{Sch}^{\circ}_{/S} \to \mathbf{Gp}$ un préfaisceau en groupes. Si le foncteur ϖF est représentable par un morphisme de schémas $G \to S$, on dit que G est un *S-schéma en groupes* (correspondant au préfaisceau en groupes F). Si G et G' sont deux S-schéma en groupes, correspondant aux préfaisceaux en groupes F et F' sur $\mathbf{Sch}_{/S}$ respectivement, on appelle *morphisme de S-schémas en groupes* de G vers G' tout S-morphisme de G vers G' qui correspond (par le lemme de Yoneda) à un morphisme de foncteurs $\varpi F \to \varpi F'$ provenant d'un morphisme de foncteurs $F \to F'$.

1. Soit $f : G \to S$ un S-schéma en groupes correspondant à un préfaisceau en groupes $F : \mathbf{Sch}^{\circ}_{/S} \to \mathbf{Gp}$. En utilisant le lemme de Yoneda, répondre aux questions suivantes.

(i) Montrer que la structure de préfaisceau en groupes sur F induit un morphisme de S-schémas $m_G : G \times_S G \to G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m_G \times_S 1_G"] \arrow[d, "1_G \times_S m_G"'] & G \times_S G \arrow[d, "m_G"] \\
G \times_S G \arrow[r, "m_G"'] & G
\end{tikzcd}$$

(ii) Montrer que la structure de préfaisceau en groupes sur F induit un morphisme de schémas $e_G : S \to G$ tel que $fe_G = 1_S$ et que le diagramme suivants soit commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e_G f, 1_G)_S"] \arrow[dr, "1_G"'] & G \times_S G \arrow[d, "m_G"] & G \arrow[l, "(1_G, e_G f)_S"'] \arrow[dl, "1_G"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

(iii) Montrer que la structure de préfaisceau en groupes sur F induit un morphisme de S-schémas $\iota_G : G \to G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(1_G, \iota_G)_S"] \arrow[d, "(\iota_G, 1_G)_S"'] \arrow[dr, "ef"] & G \times_S G \arrow[d, "m_G"] \\ G \times_S G \arrow[r, "m_G"'] & G \end{tikzcd}$$

Les S-morphismes $m_G : G \times_S G \to G$, $e_G : S \to G$ et $\iota_G : G \to G$ sont appelé la *loi de S-schéma en groupes*, la *section d'unité* et le *morphisme d'inverse* du S-schéma en groupe G.

2. Soit $f : G \to S$ un S-schéma en groupes. Montrer que le morphisme f est séparé si et seulement si la section d'unité $e_G : S \to G$ de G est une immersion fermée. (*Indication : pour la partie de suffisance, on peut montrer que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta_{G/S}"] \arrow[d, "f"'] & G \times_S G \arrow[d, "m(1_G \times_S \iota_G)"] \\ S \arrow[r, "e_G"'] & G \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien.)

3. Soient $f : G \to S$ et $f' : G' \to S$ deux S-schémas en groupes, et $u : G \to G'$ un morphisme de S-schémas. Montrer que u est un morphisme de S-schémas en groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "u \times_S u"] \arrow[d, "m_G"'] & G' \times_S G' \arrow[d, "m_{G'}"] \\ G \arrow[r, "u"'] & G' \end{tikzcd}$$

où m_G et $m_{G'}$ sont respectivement les lois de S-schéma en groupes de G et G'.

Partie II : théorème de rigidité

Dans cette partie, on fixe un schéma S. Soient $p : X \to S$ et $q : Y \to S$ deux S-schémas, et $u : X \to Y$ un morphisme de schémas tel que $p = qu$. On suppose que

(i) le morphisme p est ouvert et fermé, et possède une section, i.e., il existe un morphisme $e : S \to X$ tel que $pe = 1_S$;

(ii) q est un morphisme séparé et le morphisme canonique $p_\# : \mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_X$ de faisceaux d'anneaux est un isomorphisme ;

(iii) toute composante connexe de S admet un point s tel que $u(p^{-1}(\{s\}))$ réduise à un point.

Le but des exercices dans cette partie est de montrer que $u = uep$.

Dans les exercices **4-5**, on fixe un point $s \in S$ tel que $u(p^{-1}(\{s\}))$ réduise à un point y.

4. Soit V un ouvert affine de Y contenant y. Montrer qu'il existe un ouvert affine U de S contenant s tel que $p^{-1}(U) \subset u^{-1}(V)$. (*Indication : utiliser l'hypothèse que p est un morphisme fermé.*)

5. En utilisant l'hypothèse que $p_\# : \mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_X$ est un isomorphisme, montrer que les restrictions de u et uep à $p^{-1}(U)$ sont identiques.

Soient $Z = \{x \in X \mid u(x) = uep(x)\}$ et

$$F = \{s \in S \mid u(x) = uep(x) \text{ pour tout } x \in p^{-1}(\{s\})\}.$$

6. Montrer que Z est un sous-ensemble fermé de X. (*Indication : considérer le produit fibré des morphismes $(u, uep)_S : X \to Y \times_S Y$ et $\Delta_q : Y \to Y \times_S Y$.*)

7. En déduire que F est un sous-ensemble fermé de S. (*Indication : utiliser l'hypothèse que p est un morphisme ouvert.*)

8. En utilisant l'hypothèse que F rencontre toute composante connexe de S, montrer que $F = S$ et conclure.

Partie III : Théorème de constructibilité de Chevalley

Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie Z de X est *rétrocompacte* si, pour tout sous-ensemble ouvert quasi-compact U de X, l'intersection $U \cap Z$ est quasi-compacte. On désigne par $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Soit $\mathfrak{C}(X)$ l'intersection des sous-ensembles de $\mathscr{P}(X)$ contenant toutes les parties ouvertes rétrocompactes de X et qui sont stables par intersection finie et par passage au complémentaire. L'ensemble $\mathfrak{C}(X)$ est donc la plus petite famille de parties de X contenant les parties ouvertes rétrocompactes, qui est stable par intersection finie et par passage au complémentaire (par conséquent, $\mathfrak{C}(X)$ est aussi stable par réunion finie). Les parties de X appartenant à $\mathfrak{C}(X)$ sont dites *constructibles*. On dit qu'une partie Z de X est *localement constructible* si, pour tout $x \in Z$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $Z \cap U$ soit une partie constructible de U.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant de Chevalley. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas quasi-compact, quasi-séparé, et localement de présentation finie, alors pour toute partie localement constructible Z de X, $f(Z)$ est une partie localement constructible de Y.

9. Soit X un espace topologique. Montrer que l'ensemble des parties ouvertes rétrocompactes est stable par intersection finie et par réunion finie.

10. Soit X un espace topologique. Montrer que toute partie constructibles de X peut s'écrire comme une réunion finie de parties de la form $U \cap V^c$, où U et V sont des parties ouvertes rétrocompactes de X.

11. Soient X un schéma et U un sous-ensemble ouvert de X. Montrer que U est une partie rétrocompacte si et seulement si le morphisme d'inclusion $U \to X$ est quasi-compact. En déduire que, si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, alors l'image réciproque par f d'un sous-ensemble constructible de Y est un sous-ensemble constructible de X.

12. Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé et Z une partie localement constructible de X. Montrer que Z est constructible et qu'il existe un schéma affine Y et un morphisme de schémas $f : Y \to X$ tel que $Z = f(Y)$. (*Indication : pour la première assertion, on peut commencer par montrer que $Z \cap V$ est constructible dans V pour tout ouvert affine V de X.*)

13. Soient X un schéma quasi-séparé et Z un sous-ensemble localement constructible de X. On suppose que Z est stable par généralisation (pour tout élément $z \in Z$ et tout élément $x \in X$ tels que $z \in \overline{\{x\}}$, on a $x \in Z$). Montrer que Z est un sous-ensemble ouvert de X. (*Indication : ramener le problème au cas où X est affine puis appliquer le résultat de la question précédente au complémentaire de Z.*)

14. Soient X un espace topologique noethérien et Z une partie de X. Montrer que Z est constructible si et seulement s'il peut s'écrire comme une réunion finie de parties localement fermées (i.e. intersection d'un ouvert et un fermé).

15. Soit X un espace topologique noethérien. Soit Z une partie de X. Supposons que, pour toute composante irréductible X_0 de X, ou bien l'intersection $Z \cap X_0$ contient un sous-ensemble ouvert non-vide de X_0, ou bien l'adhérence $\overline{Z \cap X_0}$ est strictement contenu dans X_0. Montrer que Z est une partie constructible de X. (*Indication : on peut raisonner par récurrence noethérienne sur l'ensemble des parties fermées Y de X telles que $Y \cap Z$ soit constructible.*)

16. Soient A un anneau et B une algèbre de type fini sur A. On suppose que les anneaux A et B sont intègres et que le morphisme d'anneaux structural $A \to B$ est une application injective. Montrer qu'il existe $g \in A$ tel que tout morphisme d'anneaux de A dans un corps algébriquement clos Ω, non nul en g, se prolonge en un morphisme de B dans Ω.

17. On garde les notations de la question précédente. Soit $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme de schémas défini par la structure de A-algèbre de B. Montrer que l'image de f contient un ouvert dense.

18. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini, où Y est un schéma noethérien. Montrer que $f(X)$ est une partie constructible de Y. (*Indication : on peut traiter d'abord le cas où Y est irréductible.*)

19. Soient Y un schéma affine, X un schéma quasi-compact, et $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie. Montrer que $f(X)$ est une partie constructible de Y. (*Indication : ramener le problème au cas où X est affine et Y est noethérien.*)

20. Conclure.

Partie IV : morphismes plat

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est plat si, pour tout $x \in X$, le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ induit par f définit une structure de $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-algèbre plate sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$.

21. Montrer que la platitude est une propriété stable par composition et par changement de base.

22. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas qui est plat. Montrer que, pour tout $x \in X$ et toute généralisation y' de $y = f(x)$, il existe une généralisation x' de x telle que $f(x') = y'$.

23. En utilisant le théorème de constructibilité de Chevalley, montrer que tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert.

Partie V : une application du théorème de rigidité

Dans le reste de la partie, on fixe un morphisme de schéma $f : X \to S$ qui est propre, plat, de présentation finie et à fibre géométriquement connexe (pour tout corps k et tout morphisme de schémas $\operatorname{Spec} k \to S$, le produit fibré $X \times_S \operatorname{Spec} k$ est connexe). Soient $\varphi : T \to S$ et $g : Y \to S$ deux morphisme de schémas. On suppose que φ est à fibre connexe (pour tout point $s \in S$, le produit fibré $X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s)$ est connexe, où $\kappa(s)$ est le corps résiduel de s et on considère le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \kappa(s) \to S$ correspondant au point $s \in S$) et g est un morphisme séparé. Soit $u : X \times_S T \to Y$ un morphisme de S-schémas. Soient x, t et y des sections de f, φ et g respectivement. On suppose que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(1_X, tf)_S"] \arrow[d, "f"'] & X \times_S T \arrow[d, "u"] \\ S \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "(x\varphi, 1_T)_S"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \times_S T \arrow[d, "u"] \\ S \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le but de cette partie est de montrer que $u = y\pi$, où $\pi : X \times_S T \to S$ est le morphisme structural.

24. Montrer que le morphisme de projection $p : X \times_S T \to T$ est ouvert et fermé.

25. Vérifier que le morphisme $(x\varphi, 1_T)_S : T \to X \times_S T$ est une section de p.

26. On admet que $p_*(\mathcal{O}_{X\times_S T}) = \mathcal{O}_T$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[rr, "(u,p)_S"] \arrow[dr, shift left, "p"] & & Y \times_S T \arrow[dl, "g_T"] \\
& T \arrow[ul, shift left, "(x\varphi,1_T)_S"] &
\end{tikzcd}$$

En utilisant le théorème de rigidité établi dans la partie II, montrer que

$$(u,p)_S = (u,p)_S(x\varphi, 1_T)_S\, p,$$

et en déduire que $u = y\pi$.

Partie VI : schémas abéliens

Soit S un schéma. On considère un schéma en groupes $\pi : A \to S$ sur S qui est propre, plat et à fibre géométriquement connexe. Dans les exercices **27-29**, on fixe un S-schéma en groupes $\varphi : G \to S$ et un morphisme de S-schémas $u : A \to G$. On suppose que le morphisme φ est séparé, et que $ue_A = e_G$, où e_A et e_G sont les sections d'unité de A et G respectivement.

Soient f, g et h les morphismes de S-schémas composés

$$A \times_S A \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A \xrightarrow{u} G, \quad A \times_S A \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} A \xrightarrow{u} G, \quad A \times_S A \xrightarrow{m_A} A \xrightarrow{u} G$$

respectivement, où m_A est la loi de S-schéma en groupes de A. Soit w le produit fgh^{-1} dans le groupe $G(A \times_S A)_S$ des S-morphismes de $A \times_S A$ dans G.

27. Montrer que $w(1_A, e_A\pi)_S = w(e_A\pi, 1_A)_S = e_G\pi$ comme S-morphisme de A vers G.

28. En utilisant le résultat de la partie V, montre que $w = e_G q$, où $q : A \times_S A \to S$ est le morphisme structural.

29. En déduire que u est un morphisme de S-schéma en groupes.

30. Montrer que le morphisme d'inverse $\iota_A : A \to A$ est un morphisme de S-schémas en groupes. En déduire que le S-foncteur en groupes correspondant à A provient d'un foncteur de la catégorie $\mathbf{Sch}^\circ_{/S}$ dans la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens.

Fin de l'épreuve