Université Paris Diderot, 2016-2017
M2 Théorie des faisceaux et des schémas

Feuille d'exercices n° 1

Dans cette feuille d'exercices, on fixe une catégorie $\mathcal{C}$.

1. Soit $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'application d'inclusion.

(1) Qu'est-ce qu'un monomorphisme de la catégorie des ensembles ? Un épimorphisme de la catégorie des ensembles ?

(2) Montrer que, l'application i, vue comme un morphisme de la catégorie des groupes abéliens, est un monomorphisme mais pas un épimorphisme.

(3) Montrer que, l'application i, vue comme un morphisme de la catégorie des anneaux, est un monomorphisme et un épimorphisme. Est-ce un isomorphisme ?

2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.

(1) Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si le diagramme carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien.

(2) Montrer que f est un épimorphisme si et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

3. Soient I une catégorie petite, F et G deux foncteurs de I dans $\mathcal{C}$, et $\varphi : F \to G$ une transformation naturelle.

(1) On suppose que, pour tout $i \in I$, le morphisme $\varphi(i) : F(i) \to G(i)$ est un monomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}$. Montrer que φ est un monomorphisme dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$.

(2) $(***)$ On suppose que $\mathcal{C}$ est complète. Montrer que, si φ est un monomorphisme dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$, alors $\varphi(i)$ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}$ pour tout i.

4. On suppose que $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ est la catégorie des espaces topologiques et des applications continues.

(1) Montrer que le foncteur d'oubli de **Top** à la catégorie des ensembles **Ens**, qui envoie tout espace topologique sur son espace sous-jacent, admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. Décrire ces foncteurs adjoints.

(2) Montrer que la catégorie **Top** est à la fois complète et cocomplète. Décrire les limites projectives et les limites inductives dans la catégorie **Top**.

(3) Montrer que les monomorphismes dans la catégorie **Top** sont les applications continues injectives, et les épimorphismes sont les applications continues surjectives.

(4) Montrer que les isomorphismes dans la catégorie **Top** sont les homéomorphismes.

(5) Construire un morphisme de la catégorie **Top** qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme.

(6) Soit **TopS** la sous-catégorie pleine de **Top** des espaces topologiques séparés. Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ d'espaces topologiques séparés est un épimorphisme dans **TopS** si et seulement si $f(X)$ est dense dans Y.

5. Soient A un anneau commutatif unitaire et P une partie de A. Montrer que le foncteur de **An** dans **Ens** qui envoie un anneau B sur l'ensemble des morphismes de A dans B s'annulant sur P, est représentable.

6. Soient k un anneau commutatif et unifère, et $\mathbf{An}_k$ la catégorie des k-algèbres commutatives. Montrer que les foncteurs suivants de $\mathbf{An}_k$ dans la catégorie des ensembles sont représentables :

(1) le foncteur Gm_k qui envoie toute k-algèbre R sur l'ensemble $R^\times$ des éléments inversibles de R,

(2) le foncteur $M_{n\times m,k}$ qui envoie toute k-algèbre R sur l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans R, où n et m sont deux entiers $\geqslant 1$,

(3) le foncteur $\mathrm{GL}_{n,k}$ qui envoie toute k-algèbre R sur l'ensemble des matrices carrés de taille $n \times n$ à coefficients dans R et inversibles, où n est un entier, $n \geqslant 1$,

(4) le foncteur $\mathrm{SL}_{n,k}$ qui envoie toute k-algèbres R sur l'ensemble des matrices carrés de taille $n \times n$ à coefficients dans R et de déterminant 1, où n est un entier, $n \geqslant 1$.

7. $(* * *)$ Soient I et J une catégorie petite, et $F : I \to \mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$ un foncteur qui détermine un foncteur de J dans $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ que l'on note F'. On suppose que, pour tout $j \in J$, l'objet $F(j)$ dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ admet une limite projective $\varprojlim F(j)$ (resp. limite inductive $\varinjlim F(j)$). Montrer que la correspondance $j \mapsto \varprojlim F(j)$ (resp. $j \mapsto \varinjlim F(j)$) définit un foncteur de J dans $\mathcal{C}$, qui est la limite projective (resp. limite inductive) du foncteur F.