Université Paris Diderot
M2 Théorie des faisceaux et des schémas

Feuille d'exercice 2

1. Soit X un espace topologique et F un faisceau d'ensembles sur X. Montrer que $F(\varnothing)$ est un singleton.

2. Soit X un espace topologique, F et G deux faisceaux d'ensembles sur X et $\varphi : F \to G$ un morphisme de faisceaux.

(1) Montrer que, si φ est un monomorphisme dans la catégorie des faisceaux, alors pour tout ouvert U de X l'application $\varphi(U) : F(U) \to G(U)$ est injective.

(2) Montrer que l'énoncé précédent est faux en général si on remplace "monomorphisme" par "épimorphisme" et "injective" par "surjective".

3. Soient X un espace topologique et F un faisceau d'ensembles sur X. Pour tout sous-ensemble Y de X, on désigne par $\Gamma(Y, F)$ l'ensemble $(i_Y^{-1}F)(Y)$, où $i_Y : Y \to X$ désigne l'application d'inclusion (et Y est muni de la topologie induite). Rappelons que l'adjonction entre i_Y^{-1} et $i_{Y,*}$ définit un morphisme de faisceaux $F \to i_{Y,*}i_Y^{-1}F$, qui donne en particulier une application $F(U) \to \Gamma(Y, F)$ pour tout ouvert de X contenant Y, appelée l'*application de restriction* à Y.

(1) Soit Y un sous-ensemble de X. Montrer que $\Gamma(Y, F) = \varinjlim_{U \supset Y} F(U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de X contenant Y. On peut montrer que le préfaisceau $i_Y^{\dagger}F$ défini dans le cours est en fait un faisceau.

(2) Soient Y et Z deux sous-ensembles de X, $Z \subset Y$. Montrer que les applications $F(U) \to \Gamma(Z, F)$, où $U \subset X$ parcourt l'ensemble des parties ouverts de X contenant Y, induit par passage à la limite inductive une application $|_Z : \Gamma(Y, F) \to \Gamma(Z, F)$.

(3) Soit $(M_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des parties fermées qui est localement fini (pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini de M_i). Pour tout $i \in I$, soit $s_i \in \Gamma(M_i, F)$. On suppose que, pour tout $(i, j) \in I^2$, on a $s_i|_{M_i \cap M_j} = s_j|_{M_i \cap M_j}$. Montrer qu'il existe un unique élément $s \in F(X)$ tel que $s_i = s|_{M_i}$ pour tout $i \in I$.

4. Soit K un corps infini. On le munit de la topologie de sorte que les fermés de K sont précisément les parties finies. Cet espace topologique est noté comme $\mathbb{A}^1(K)$.

(1) Montrer que l'espace topologique $\mathbb{A}^1(K)$ est quasi-compact (dans ce cours, un espace topologique X est dit *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini).

(2) Pour tout ouvert U de $\mathbb{A}^1(K)$, soit $\mathcal{O}(U)$ le sous-ensemble de $K(T)$ des fonctions rationnelles qui peuvent s'écrire sous la forme f/g, où f et g sont des polynômes dans $K[T]$, $g \neq 0$ et $g(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{A}^1(K) \setminus U$. Montrer que $\mathcal{O}(U)$ est un sous-anneau de $K(T)$ et que les $\mathcal{O}(U)$ définissent un faisceau d'anneaux sur $\mathbb{A}^1(K)$.

(3) Montrer que $(\mathbb{A}^1(K), \mathcal{O})$ est un espace localement annelé.

(4) Montrer que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1(K)) = K[T]$ si et seulement si K est algébriquement clos.

(5) Soit $\mathscr{F}$ le faisceaux des fonctions à valeurs dans K sur l'espace topologique $\mathbb{A}^1(K)$. Montrer que, pour tout ouvert U de $\mathbb{A}^1(K)$ et tout élément $f \in \mathcal{O}(U)$, la fonction $(a \in U) \mapsto f(a)$ est bien définie. Montrer que cela définit un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}$ dans $\mathscr{F}$ qui est un monomorphisme dans la catégorie des faisceaux d'anneaux sur $\mathbb{A}^1(K)$.

5. Soit X un espace topologique, U une partie ouverte de X et $Y = X \setminus U$. On désigne par $i : Y \to X$ et $j : U \to X$ les applications d'inclusion.

(1) Soit F un faisceau de groupes abéliens sur Y. Montrer que, pour tout $y \in Y$, on a $(i_*F)_y = F_y$; pour tout $x \in U$, on a $(i_*F)_x = \mathbf{0}$.

(2) Montrer que le foncteur j^{-1}, de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur U, admet un adjoint à gauche $j_!$.

(3) Montrer que, pour tout faisceau de groupes abéliens G sur U, on a $j^{-1}j_!G \cong G$. En outre, pour tout point $y \in Y$ on a $(j_!G)_y = \mathbf{0}$.

(4) Soit G un faisceau de groupes abéliens sur U. Le morphisme de $j_!G$ dans j_*G correspondant à $j^{-1}j_!G \cong G$ via l'adjonction entre j^{-1} et j_* est-t-il nécessairement un isomorphisme ?

(5) Soit F un faisceau de groupes abéliens sur X. Montrer que l'on a la suite exacte suivante dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X :

$$\mathbf{0} \longrightarrow j_!j^{-1}F \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^{-1}F \longrightarrow \mathbf{0}$$

6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Dans cet exercices, on considère les cribles d'un objet X comme des collections de morphismes de $\mathcal{C}$ dont le but est l'objet X.

(1) Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et $(S_i)_{i\in I}$ une famille de cribles de X. Montrer que $\bigcap_{i\in I} S_i$ est aussi un crible de X.

(2) Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et R une collection de morphismes de $\mathcal{C}$ dont le but est X. Montrer que l'ensemble des cribles de X contenant R admet le plus petit élément $S(R)$ pour la relation d'inclusion.

(3) Soit J une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$. Montrer que, si X est un objet de $\mathcal{C}$ et si S_1 et S_2 sont deux cribles dans $J(X)$, alors le crible $S_1 \cap S_2$ appartient à $J(X)$ aussi.

(4) Soient K une prétopologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$, J la topologie de Grothendieck associé à K, et F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans **Ens**. Montrer que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme

$$F^+(X) \cong \varinjlim_{R \in K(X)} F(S(R))$$

qui est fonctoriel en X.