Université Paris Diderot
M2 Théorie des faisceaux et des schémas

Feuille d'exercice 3

1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soient f un morphisme de $\mathcal{A}$, $i : \mathrm{Ker}(f) \to X$, $\pi : Y \to \mathrm{Coker}(f)$, $p : X \to \mathrm{Coim(f)}$, $j : \mathrm{Im(f)} \to \mathrm{Y}$ et $\varphi : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ les morphismes canoniques.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, tail, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p"'] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

(1) Soit $\alpha : \mathrm{Coim(f)} \to \mathrm{Coim}(\varphi)$ le morphisme canonique. Montrer que i est le noyau de αp.

(2) Montrer que αp est le conoyau de i.

(3) En déduire que α est un isomorphisme et φ est un monomorphisme.

(4) Montrer que φ est un isomorphisme.

2. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive dont tout morphisme admet un noyau et un conoyau. On suppose que, pour tout morphisme f dans $\mathcal{A}$, le morphisme canonique $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme. Montrer que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne.

3. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes dans $\mathcal{A}$ tels que $gf = 0$. On désigne par $D(f, g)$ l'image de la composée des morphismes canoniques $\mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} \mathrm{Coker}(f)$.

(1) Montrer que le morphisme canonique $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ est le noyau de πi.

(2) En déduire que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une suite exacte si et seulement si $D(f, g)$ est l'objet nul.

(3) Montrer que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une suite exacte si et seulement si $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ est une suite exacte dans la catégorie opposée $\mathcal{A}^\circ$.

4. Montrer que les catégories suivantes sont des catégories abéliennes.

(1) La catégorie **Ab** des groupes abéliens.

(2) La catégorie k-**Mod** des modules sur un anneau commutatif et unitaire k.

5. On considère un diagramme commutatif dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & X_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\
Y_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Y_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & Y_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & Y_5
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes sont supposées exactes. On suppose que f_2 et f_4 sont des monomorphismes, et que f_1 est un épimorphisme.

(1) Montrer que l'on a une suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha_1) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_2\alpha_1) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_2) \longrightarrow \mathbf{0}$$

(2) Montrer que $\mathrm{Coker}(f_2\alpha_1) \cong \mathrm{Im}(\beta_2)$.

(3) En déduire que le morphisme canonique $f_2' : \mathrm{Im}(\alpha_2) \to \mathrm{Im}(\beta_2)$ est un monomorphisme.

(4) En appliquant le lemme du serpent au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}(\alpha_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_2'"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & \mathrm{Im}(\alpha_3) \arrow[r] \arrow[d, "f_4'"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Im}(\beta_2) \arrow[r] & Y_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & Y_4 &
\end{tikzcd},$$

où $f_4' : \mathrm{Im}(\alpha_3) \to Y_4$ est la composée de f_4 avec le morphisme canonique $\mathrm{Im}(\alpha_3) \to X_4$, montrer que f_3 est un monomorphisme.

(5) Montrer que, si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est aussi un isomorphisme.

6. On dit qu'un groupe abélien G est divisible si pour tout $x \in G$ et tout $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ il existe $y \in G$ tel que $x = ay$. On désigne par $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de **Ab** des groupes abéliens divisibles.

(1) Montrer que $\mathcal{A}$ est une catégorie additive.

(2) Montrer que tout morphisme dans $\mathcal{A}$ admet un noyau et un conoyau.

(3) Déterminer le noyau et le conoyau de l'application de projection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, vue comme un morphisme dans la catégorie $\mathcal{A}$.

(4) En déduire que $\mathcal{A}$ n'est pas une catégorie abélienne.

7. Soit k un anneau commutatif et unitaire.

(1) Soit M un k-module. Montrer que le foncteur $- \otimes_k M$ est adjoint à gauche du foncteur h_M (vu comme un foncteur de k-**Mod** dans k-**Mod**).

(2) Montrer que, si $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est une suite exacte de k-modules, pour tout k-module M, le diagramme des produits tensoriels

$$A \otimes_k M \longrightarrow B \otimes_k M \longrightarrow C \otimes_k M \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

(3) Montrer que, si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ est une suite exacte de k-modules, pour tout k-module M, le diagramme

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, C)$$

est une suite exacte.