Université Paris Diderot
M2 Théorie des faisceaux et des schémas

Feuille d'exercice 4
Algèbre commutative, spectre topologique d'un anneau.

Dans cette feuille, tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Soit A un anneau.

(1) Supposons A non nul. Montrer, en utilisant le lemme de Zorn, que A admet un idéal maximal.

(2) Supposons A non nul. Montrer, en utilisant le lemme de Zorn, que A admet un idéal premier minimal. Que dire si A est intègre ?

(3) Soit I un idéal de A. On appelle *radical de I* l'idéal $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}^*, x^n \in I\}$. Montrer que $V(I) = V(\sqrt{I})$.

(4) Soit I un idéal de A.

(a) Montrer que $\sqrt{I} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}$, où l'intersection est prise sur tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ contenant I.

(b) Supposons qu'il existe $f \in A \backslash \sqrt{I}$. Montrer qu'il existe un idéal premier contenant I et disjoint de $S = \{f^n, n \in \mathbf{N}\}$.

(c) En déduire $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}$.

(d) Montrer qu'en particulier l'ensemble des nilpotents de A est égal à l'intersection des idéaux premiers de A.

2. Soit A un anneau.

(1) Soient x un point de $\operatorname{Spec} A$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A correspondant. Montrer que $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p})$.

(2) Montrer que les fermés irréductibles de $\operatorname{Spec} A$ sont les $V(\mathfrak{p})$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.

Rappel : Un sous-espace d'un espace topologique est dit irréductible s'il n'est pas union de deux fermés stricts.

(3) On appelle *composante irréductible* d'un espace topologique un sous-espace irréductible et maximal pour l'inclusion. Montrer que les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec} A$ sont les $V(\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de A.

(4) Montrer que toute composante irréductible de $\operatorname{Spec} A$ admet un unique point dense. (On dit que $\operatorname{Spec} A$ est *sobre*.)

3. Soient A un anneau et $X = \operatorname{Spec} A$ (espace topologique). Un élément e de A est dit *idempotent* si et seulement si $e = e^2$.

(1) Montrer que $a \mapsto V(a)$ définit une bijection entre les idempotents de A et l'ensembles des ouverts fermés de $\operatorname{Spec} A$. (Indication : remarquer que si e est idempotent, $X = V(e) \cup V(1-e)$.

(2) En déduire que X est connexe si et seulement si les idempotents de A sont 0 et 1.

4. Un espace topologique X est dit *noethérien* si toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire.

Montrer que si A est un anneau noethérien, alors l'espace topologique $\operatorname{Spec} A$ est noethérien.

5. Décrire $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[T]$.

6. Soit I un idéal d'un anneau A et soit $\varphi : A \to A/I$ le morphisme canonique. Montrer que l'application associée ${}^r\varphi$ définit un homéomorphisme de $\operatorname{Spec}(A/I)$ sur $V(I)$.

7. (**Lemme de Caley-Hamilton**) Soient R un anneau, I un idéal de R et M un R-module qui est engendré par n éléments $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si φ est un endomorphisme de M tel que $\varphi(M) \subset IM$, alors il existe un polynôme unitaire

$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X]$$

avec $a_j \in I^j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, tel que $P(\varphi) = 0$.

8. Soient R un anneau et M un R-module de type fini.

(1) Soit $\varphi : M \to M$ un endomorphisme. On considère M comme un $R[X]$-module via l'homomorphisme de R-algèbres

$$R[X] \longrightarrow \operatorname{End}_R(M), \quad f(X) \longmapsto f(\varphi).$$

En appliquant le lemme de Caley-Hamilton à l'endomorphisme de $R[X]$-module $1_M : M \to M$, montrer que, si φ est surjectif, alors il est un isomorphisme.

(2) En déduire que, si M est isomorphe à R^n ($n \in \mathbb{N}$) et si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un système de générateurs de M, alors il est une base de M sur R.

9. Soient R un anneau et S un anneau quotient de l'anneau de polynôme $R[X]$. Soit I l'idéal de l'homomorphisme canonique $R[X] \to S$. Soit n un entier, $n \geqslant 1$.

(1) Montrer que S est engendré comme R-module par $\leqslant n$ éléments si et seulement si I contient un polynôme unitaire de degré $\leqslant n$.

(2) Montrer que S est un R-module libre de rang n si et seulement si I est un idéal principal engendré par un polynôme unitaire de degré n.

10. (Lemme de Nakayama) Soit A un anneau. Soit $\mathfrak{R}$ le *radical de Jacobson de* A, c'est-à-dire l'intersection des idéaux maximaux de A.

(1) Soient I un idéal de A et M un A-module de type fini. Montrer que, si $IM = M$, alors il existe $r \in I$ tel que $(1-r)M = 0$.

(2) Montrer que, pour tout $a \in \mathfrak{R}$, on a $1 - a \in R^\times$.

(3) Soit a un élément de A tel que $1 - ax \in R^\times$ pour tout $x \in A$. Montrer que $a \in \mathfrak{R}$.

(4) Soit M un A-module de type fini. Montrer que, s'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A contenu dans le radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ tel que $\mathfrak{a}M = M$, alors on a $M = \{0\}$.

(5) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A contenu dans $\mathfrak{R}$ et M un A-module de type fini. Montrer que, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une famille d'éléments de M dont l'image dans $M/\mathfrak{a}M$ forme un système de générateurs de $M/\mathfrak{a}M$ comme $A/\mathfrak{a}$-module, alors M est engendré comme A-module par $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

11. On dit qu'un anneau est un *anneau de Jacobson* si tout idéal premier de l'anneau s'écrit comme l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux.

(1) Montrer qu'un anneau A est un anneau de Jacobson si et seulement s'il vérifie la propriété suivant : pour tout anneau quotient intègre R de A, si R admet un élément b tel que $R[b^{-1}]$ soit un corps, alors R est lui-même un corps.

(2) Montrer que tout anneau quotient d'un anneau de Jacobson est un anneau de Jacobson.

(3) Montrer que, si A est un anneau de Jacobson, alors l'anneau des polynômes $A[X]$ l'est aussi.

(4) Montrer le Nullstellensatz de Hilbert : si A est un anneau de Jacobson, alors toute algèbre de type fini B sur A est aussi un anneau de Jacobson. En outre, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, l'image réciproque $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{m}$ dans A est un idéal maximal de A, et le corps $B/\mathfrak{m}$ est une extension finie de $A/\mathfrak{n}$.