Université Paris Diderot
M2 Théorie des faisceaux et des schémas

Feuille d'exercice 5

1. Soit X un schéma dont l'ensemble sous-jacent contient au plus deux points, montrer que X est un schéma affine.

2. Soient $i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ le morphisme d'inclusion et $f : \operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ le morphisme de schémas correspondant à i. Soit $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le morphisme d'anneaux qui envoie $z \in \mathbb{C}$ sur $z \otimes 1$.

(1) Montrer que le morphisme d'anneau j correspond au morphisme de schémas $f_{\mathbb{C}}$ déterminé par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\mathbb{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r, "f"'] & \operatorname{Spec} \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(2) Construire deux morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres distincts α et β de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tels que $\alpha j = \beta j = 1_{\mathbb{C}}$.

(3) En déduire que $f_{\mathbb{C}}$ n'est pas une application injective et que le morphisme f est injectif mais pas universellement injectif.

3. Soient k un corps et I un ensemble infini. Soit A l'anneau produit k^I.

(1) Montrer que, pour tout $i \in I$, la projection de A dans k sur la coordonnée d'indice i identifie k à un anneau quotient de A.

(2) Pour tout $i \in I$, soit x_i le point de $\operatorname{Spec} A$ correspondant à la projection $A \to k$ sur la coordonnée d'indice i. Montrer que x_i est un point fermé et ouvert.

(3) En déduire que $\operatorname{Spec} A$ contient au moins un point qui n'est pas dans $\{x_i\}_{i \in I}$.

(4) Construire une immersion ouverte d'un schéma dans $\operatorname{Spec} A$ qui n'est pas quasi-compact.

4. Soient X un schéma et $f : Y \to X$ une immersion fermée.

(1) Montrer que f est quasi-compact et quasi-séparé.

(2) En déduire que $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent.

(3) Montrer que le morphisme structurel $f_\# : \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un épimorphisme.

5. Soit X un schéma. Soit I un sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ (appelé un idéal quasi-cohérent). Montrer que, à isomorphisme près, il existe une unique immersion fermée $f : Y \to X$ telle que $f_*(\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_X / I$.

6. Construire un morphisme de schémas qui n'est pas séparé.

7. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute chaîne décroissante $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ de sous-ensembles fermés de X est stationnaire.

(1) Montrer que le spectre premier d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien.

(2) Construire un anneau non-noethérien A tel que $\operatorname{Spec} A$ soit un espace topologique noethérien.

(3) Soit X un espace topologique noethérien.

(i) Montrer que X est quasi-compact.

(ii) Montrer que tout sous-ensemble de X muni de la topologie induite est un espace topologique noethérien.

(iii) Montrer que X n'admet qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

8. Soit X un schéma. On dit qu'un ouvert U de X est schématiquement dense si le morphisme structurel $i_\# : \mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_U)$ est un monomorphisme, où $i : U \to X$ désigne l'application d'inclusion. Soient $\varphi : X \to S$ et $\psi : Y \to S$ deux morphismes de schémas, où ψ est séparé. Montrer que si f et g sont deux S-morphismes de X dans Y qui coïncident sur un sous-ensemble ouvert schématiquement dense de X, alors on a $f = g$.