EXAMEN - 26 Mai 2015 - Première session

Durée 3h

Problème 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Soient $u_1 = (2, 2, -1)$ et $u_2 = (0, 3, -3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la famille orthonormée de Gram-Schmidt produite à partir de (u_1, u_2).

(2) Soit F le plan engendré par u_1 et u_2 et P_F le projecteur orthogonal sur F. Si $X = (x, y, z)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, écrire le vecteur $P_F(X)$ en fonction des coordonnées x, y, z de X.

(3) En déduire la matrice de P_F écrite dans la base canonique.

(4) Soit (v_1, v_2) la base orthonormée trouvée à la question (1). Trouver un vecteur v_3 tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base orthonormée directe.

(5) Ecrire une équation du plan P faisant intervenir le vecteur v_3.

(6) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Justifier le fait que M représente une rotation, puis donner un vecteur directeur de l'axe ainsi que la valeur de $\cos(\theta)$, où θ est l'angle de rotation.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de classe C^2 définie par

$$f(x, y) = x^2 y + e^{-y} \qquad (\star)$$

(1) Calculer le vecteur gradient $\nabla f(x, y)$ et la matrice Hessienne $Hf(x, y)$.

(2) Trouver les points critiques de f et determiner leur nature.

(3) Faire un dessin du domaine quarrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \in [1, 2] \text{ et } \ln(x) \le y \le 2\ln(x)\}$$

(4) Calculer (f étant la fonction définie en $(\star)$):

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dxdy.$$

Tournez la page SVP...

Problème 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction C^1 par morceaux et 1-périodique définie par

$$\begin{cases} f(x) = e^{2\pi x} & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ f(x+1) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2, 2]$.

(2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe de f noté $\widehat{f_n}$.

(3) Calculer

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx$$

(4) En déduire, en utilisant l'égalité de Parseval, que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{\operatorname{th}(\pi)}.$$

(6) On suppose qu'il existe une solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique à l'équation

$$2\pi u(x) + u'(x) = f(x).$$

Determiner les coefficients de Fourier (complexes) de u.

Problème 4 (Questions de cours)

Soit $R > 0$ et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\gamma(t) = \big(R(t - \sin(t)), R(1 - \cos(t))\big)$.

(1) Donner le vecteur tangent unitaire pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

(2) Calculer la longueur de la courbe. *Indication: on pourra utiliser la formule* $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.