EXAMEN - 3 Juillet 2015 - Deuxième session
Durée 3h

Problème 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Soient $u_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ et $u_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(1) Soit F l'espace engendré par u_1 et u_2. Donner une base orthonormée de $F^\perp$.

(2) Écrire la matrice de projection orthogonale sur F dans la base canonique.

(3) Écrire la matrice de projection orthogonale sur F dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), où (u_3, u_4) désigne la base de $F^\perp$ trouvée à la question (1).

(4) Soit $e_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $P_F(e_1)$. En déduire la valeur de $\min\limits_{y \in F} \|e_1 - y\|$.

Problème 2

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on note $\mathcal{R}(a,b)$ le rectangle centré au point (a,b), de longueur (horizontale) π et largeur (verticale) 1, c'est à dire

$$\mathcal{R}(a,b) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x-a| \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } |y-b| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(x,y) = 3y^2 \cos(x).$$

(1) Calculer

$$F(a,b) := \iint_{\mathcal{R}(a,b)} f(x,y)\, dxdy$$

en fonction des réels a et b.

Indication: on veillera à mettre le résultat sous la forme $P(b)\cos(a)$ où $P(b)$ est un polynôme en b de degré 2.

(2) Calculer le vecteur gradient et la matrice Hessienne de $(a,b) \mapsto F(a,b)$ en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Trouver les points critiques de $F(a,b)$ et leur nature.

(4) Que valent

$$\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} F(a,b) \qquad \text{et} \qquad \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} F(a,b) \quad ?$$

Tournez la page SVP...

Problème 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction C^1 par morceaux et 1-périodique définie par

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{pour tout } x \in [0,1[, \\ f(x+1) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2,2]$.

(2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe de f noté $\widehat{f}_n$.

(3) En appliquant le théorème de Dirichlet avec $x = 1/4$, en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Problème 4

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par: $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + te^x)\, dx.$

(1) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

(2) Donner une expression sans intégrale de $F'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.