Université Paris Diderot - Paris 7 — L2 Physique
MP4 — 2014-2015

PARTIEL - 10 Mars 2015 – corrigé
Durée 2h

Problème 1 – [6 points]

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. On considère la matrice suivante.

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Justifier le fait que la matrice M représente une rotation.

Solution. *Vérifions d'abord que M soit une matrice orthogonale.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 - 32 + 28 = 0\ , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -32 + 4 + 28 = 0$$

les vecteurs colonnes sont donc bien 2 à 2 orthogonaux. De plus

$$\|(1, -8, 4)\|^2 = 1 + 64 + 16 = 81 = 9^2$$
$$\|(-8, 1, 4)\|^2 = 64 + 1 + 16 = 81 = 9^2$$
$$\|(4, 4, 7)\|^2 = 16 + 16 + 49 = 81 = 9^2$$

donc les vecteurs colonnes sont de norme 1*. On vient donc de montrer que*

$$\boxed{M \in O_3(\mathbb{R})}.$$

(une autre méthode aurait été de montrer que ${}^tMM = Id$) Enfin,

$$\begin{aligned} det(M) &= \frac{1}{9^3} det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9^3} det \begin{pmatrix} 9 & 4 & -8 \\ -9 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9^3} det \begin{pmatrix} 9 & 4 & -8 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9^3}[9(4 \times 8 + 7 \times 7)] = \frac{1}{9^3}[9 \times 81] = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Donc

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R})}$$

ce qui prouve que M représente une rotation.

(2) Determiner le vecteur directeur unitaire de l'axe dont la première coordonnée est positive.

Solution. *Un vecteur directeur X de l'axe de rotation doit vérifier l'équation $MX = X$. Soit à résoudre le système*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -8x + 4y - 8z & = 0 \\ -8x - 5y + z & = 0 \\ 4x + 7y - 5z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -8x + 4y - 8z & = 0 \\ -9y + 9z & = 0 \\ 18y - 18z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -2x & = z \\ y & = z \\ y & = z \end{array} \right.$$

Donc l'axe de rotation est engendré par le vecteur $v = (-1, 2, 2)$*. La norme de ce vecteur est*

$$\|v\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

On en dénduit que l'unique vecteur directeur de l'axe, unitaire, dont la première coordonnée est positive est le vecteur

$$\boxed{v = \frac{1}{3}(1, -2, -2)}.$$

(3) Trouver l'angle de rotation associé.

Solution. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'angle orienté de rotation. Puisque* $tr(M) = \frac{1}{9}(1+4+4) = 1$*, on en dénduit que* $1 + 2\cos(\theta) = 1$*, soit* $\cos(\theta) = 0$*. D'où* $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$*. Pour déterminer* θ *entre ces deux valeurs, il suffit de connaître le signe de* $\sin(\theta)$*.*

Soit v *le vecteur qui oriente l'axe de rotation trouvé dans la question précédente et soit* $u = (4, 1, 1)$ *un vecteur orthogonal à* v*, arbitrairement choisi. D'après le cours on a*

$$signe(\sin(\theta)) = signe(\det(v, u, Mu)).$$

Or

$$Mu = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+4-8 \\ -32+4+1 \\ 16+7+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ -27 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det(v, u, Mu) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 18 > 0.$$

Il s'en suit donc que

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Problème 2 – [8 points]

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous espace vectoriel dont l'équation est

$$F = \{(x, y, z)\ ;\ 2x + y - z = 0\}.$$

(1) Determiner $F^\perp$ (on prendra soin à justifier le plus possible la réponse).

Solution. *Par définition, nous avons*

$$F = \{(x, y, z)\ ;\ \langle (x, y, z), (2, 1, -1)\rangle = 0\} = (2, 1, -1)^\perp.$$

Donc $F^\perp = ((2, 1, -1)^\perp)^\perp$*. Or nous avons vu en cours que* $(A^\perp)^\perp = Vect\{A\}$*, d'où*

$$\boxed{F^\perp = Vect\{(2, 1, -1)\}}$$

(2) Trouver une base orthonormée de F en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

Solution. *Soit* $u_1 = (1, 0, 2)$ *et* $u_2 = (0, 1, 1)$ *deux vecteurs de* F *arbitrairement choisis. L'orthogonalisé de Gram-Schmidt est la famille* (w_1, w_2) *avec* $w_1 = u_1$ *et*

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{9}(1, 0, 2) = (-\frac{2}{9}, 1, \frac{5}{9}).$$

Par suite, l'orthonormalisée de Gram-Schmidt est la famille (v_1, v_2) avec $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ et $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$ soit

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) \quad , \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{110}}(-2,9,5)}$$

Remarque: On aurait pu aller plus vite sans utiliser Gram-Schmidt en choisissant directement $w_1 = u_1$ puis $w_2 = v \wedge u_1$, où $v = (2,1,-1)$.

(3) Écrire les matrices de projection orthogonale sur F et de symétrie orthogonale par rapport à F, dans la base canonique.

Solution. *La matrice de projection orthogonale sur $F^\perp$ est plus simple car elle est définie par*

$$P_{F^\perp}(X) = \frac{\langle X, v\rangle}{\|v\|^2}v,$$

où $v = (2,1,-1)$ est un vecteur directeur de $F^\perp$. En écrivant $X = (x,y,z)$ on trouve

$$P_{F^\perp}(X) = \frac{(2x+y-z)}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où la matrice dans la base canonique de $P_{F^\perp}$ suivante

$$P_{F^\perp} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la relation $P_F + P_{F^\perp} = Id$ on en déduit

$$P_F = Id - P_{F^\perp} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

Enfin, d'après la relation $S_F = 2P_F - Id$ on en déduit

$$S_F = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

On se place maintenant dans l'espace euclidien des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (que l'on note $\mathbb{R}_2[X]$) muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

(4) Montrer que les 3 vecteurs suivants

$$v_1 = 1, \quad v_2 = X, \quad v_3 = X^2 - \frac{1}{3}$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer chacune de leur norme.

Solution. *On a*

$$\langle v_1, v_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1dt = 0 \quad , \langle v_1, v_3\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 - \frac{1}{3}dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\langle v_2, v_3\rangle = \int_{-1}^{1} t(t^2 - \frac{1}{3})dt = 0 \text{ (\textit{intégrale d'une fonction impaire sur} } [-1,1] \text{)}$$

Donc la famille est bien orthogonale. Calculons les normes respectives.

$$\|v_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1dt = 2 \Rightarrow \boxed{\|v_1\| = \sqrt{2}}.$$

$$\|v_2\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\|v_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\|v_3\|^2 = \int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = \int_{-1}^{1} t^4 - 2\frac{t^2}{3} + \frac{1}{9} dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{5 \times 9} \Rightarrow \boxed{\|v_3\| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}$$

(5) [**Question hors barême**] On pose $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ pour $1 \leq i \leq 3$. En identifiant $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base orthonormée (e_1, e_2, e_3), donner l'image du polynôme $P(X) = 2 + \sqrt{3}X - \frac{3\sqrt{5}}{2}(X^2 - \frac{1}{3})$ par la projection orthogonale sur F définie à la question (3).

Solution. *On observe facilement que, dans la base (e_1, e_2, e_3), P s'écrit*

$$P = \sqrt{2}(2e_1 + e_2 - e_3) = \sqrt{2}(2, 1, -1)$$

qui est justement un multiple du vecteur orthogonal à F des questions précédentes. On en dénduit directement que

$$\boxed{P_F(P) = 0}$$

Problème 3 – [6 points]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre réel et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de classe C^2 définie par

$$f(x, y) = x^2 e^y + \lambda(y^3 - 3y).$$

(1) Calculer le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f au point (x, y).

Solution. *Un simple calcul donne*

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \left(2xe^y \ , \ x^2 e^y + \lambda(3y^2 - 3)\right)}$$

$$\boxed{Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2 e^y + 6\lambda y \end{pmatrix}}$$

(2) Trouver les points critiques de f pour $\lambda \neq 0$ et determiner leur nature en fonction de λ.

Solution. *Les points critiques de f sont les solutions de l'équation $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ c'est à dire*

$$\begin{cases} 2xe^y = 0 \\ x^2 e^y + 3\lambda(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 0$, puis, la deuxième implique $y = 1$ ou $y = -1$. Il y a donc deux points critiques qui sont

$$\boxed{X_1 = (0, 1) \quad \textit{et} \quad X_2 = (0, -1)}$$

Au point X_1 la matrice Hessienne vaut

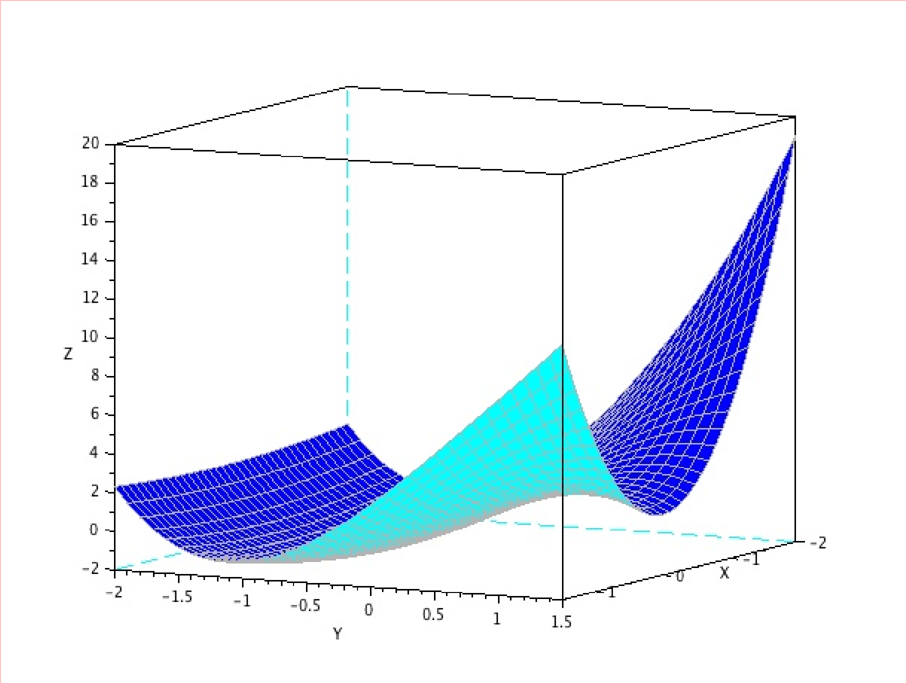
$$\boxed{Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 6\lambda \end{pmatrix}}$$

La matrice $Hf(0, 1)$ étant diagonale, ses valeurs propres sont évidentes et valent $2e$ et 6λ. On en déduit que, si $\lambda > 0$ la matrice est définie positive, nous avons affaire minimum local *(strict). Si en revanche $\lambda > 0$ nous avons un* point selle.

De même, au point X_2 la matrice Hessienne vaut

$$\boxed{Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & -6\lambda \end{pmatrix}}$$

La matrice $Hf(0,1)$ étant diagonale, ses valeurs propres sont évidentes et valent $2e$ et -6λ. On en déduit que, si $\lambda < 0$ la matrice est définie positive, nous avons affaire à un minimum local *(strict). Si en revanche $\lambda > 0$ nous avons un* point selle.



$(x,y) \mapsto x^2e^y - (y^3 - 3y)$

(3) On suppose maintenant que $\lambda = 0$.

a) Résoudre $\nabla f(x,y) = 0$.

Solution. *On cherche (x,y) tel que*

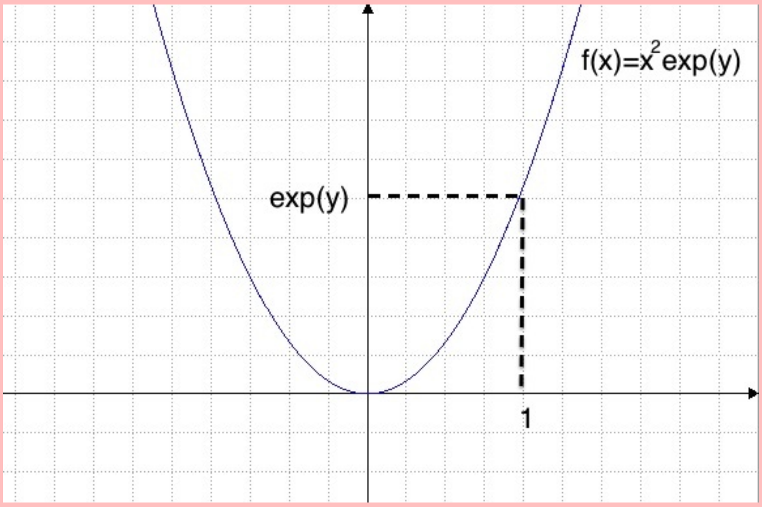
$$\begin{cases} 2xe^y = 0 \\ x^2e^y = 0 \end{cases}$$

e^y étant toujours strictement positif pour tout $y \in \mathbb{R}$, on en dèduit que l'ensemble solution recherché est la droite d'équation

$$\boxed{\{x = 0\}.}$$

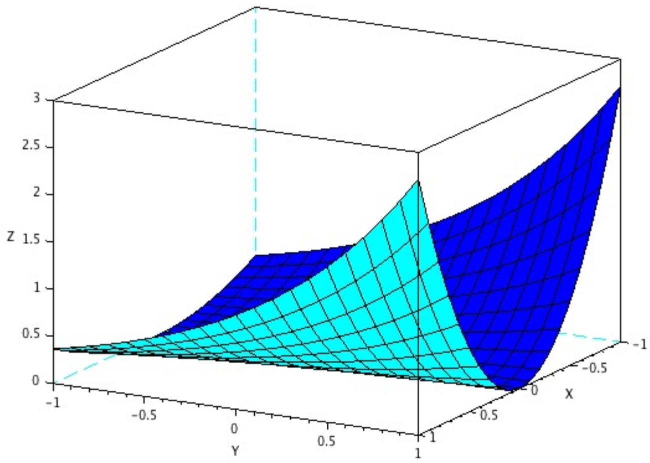
b) Représenter graphiquement $x \mapsto f(x, y)$ pour y fixé.

Solution. *Pour tout y fixé le graphe de $x \mapsto x^2 e^y$ est une parabole.*



c) En déduire la nature des points critiques de f pour $\lambda = 0$.

Solution. *On en déduit que tout point critique de la forme $(0, y)$ est un minimum global pour f. En effet, il est clair que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(0, y) = 0$ donc $(0, y)$ atteint la valeur minimale de f.*



$(x, y) \mapsto x^2 e^y$