UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7 — L2 PHYSIQUE
MP4 — 2015-2016

EXAMEN - 25 Mai 2016 - Première session
Durée 3h

Problème 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Soit F le sous espace engendré par $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (-1, 1, 3)$

(1) Donner la base orthonormée de F produite à partir (u_1, u_2) par le procédé de Gram-Schmidt.

(2) Quel est l'orthogonal $F^\perp$ de F ?

(3) Donner la matrice de projection orthogonale sur F écrite dans la base canonique.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de classe C^2 définie par

$$f(x, y) = \cos(y) \ln(1 + x^2) + y^2$$

(1) Calculer le vecteur gradient $\nabla f(x, y)$ et la matrice Hessienne $Hf(x, y)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que $(0, 0)$ est point critique de f et determiner sa nature.

(3) Trouver un point critique (x_0, y_0) différent de $(0, 0)$ tel que $0 \leq y_0 \leq \pi$.

(4) Determiner la nature du point critique trouvé à la question (3).

Tournez la page SVP...

Problème 3

(1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, l'intégrale

$$\int_0^1 x e^{2i\pi nx} dx.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction C^1 par morceaux et 1-périodique définie par

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{1}{2} & \text{pour tout } x \in [0, 1[, \\ f(x+1) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(2) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2, 2]$.

(3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe de f noté $\widehat{f}_n$.

(4) En déduire, grâce au théorème de Dirichlet, l'identité suivante:

$$\text{pour tout } x \in]0, 1[, \qquad \frac{1}{2} - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

Problème 4

(1) Faire un dessin du domaine quarrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^2 \leq y \leq \cos(x)\Big\}.$$

(2) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale double.