EXAMEN - 1er Juillet 2016 - Deuxième session

Durée 3h

Problème 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Soit F le sous espace défini par

$$F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ y + z = 0 \text{ et } x - t = 0\}.$$

(1) Donner une base orthonormée $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que:

$$F = Vect\{b_1, b_2\} \quad \text{et} \quad F^{\perp} = Vect\{b_3, b_4\}.$$

(2) Donner la matrice de projection orthogonale sur F écrite dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Donner la matrice de projection orthogonale sur F écrite dans la base canonique.

(4) Ces deux matrices sont-elles des matrices orthogonales ? (justifier la réponse).

Problème 2

(1) Faire un dessin du domaine quarrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; x \in [-1, 1] \text{ et } \ 1 - |x| \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\Big\}.$$

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y$. Calculer $\int_{\mathcal{D}} f$.

Tournez la page SVP...

Problème 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction C^1 par morceaux et 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe de f noté $\widehat{f_n}$

(2) En utilisant le théorème de Parseval, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Problème 4

Le but de ce problème est de trouver, de deux manières différentes, le vecteur $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ solution de:

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 dt.$$

Méthode 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$F(x, y) = \int_{-1}^{1} (e^t - x - yt)^2 dt.$$

(1) En calculant directement l'intégrale, montrer que

$$F(x, y) = 2x^2 + \frac{2}{3}y^2 - 4\mathrm{sh}(1)x - 4ye^{-1} + \mathrm{sh}(2).$$

(2) Donner le vecteur gradient et la matrice Hessienne de F en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Montrer que $F(x, y)$ admet un point critique unique, determiner sa nature et conclure.
On admettra le fait suivant: si F admet un unique extremum local alors c'est un extremum global.

Méthode 2. On se place dans l'espace euclidien $E := Vect\{e^t, 1, t\} \subset C^0([-1, 1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

(1) on considère le sous espace vectoriel $G := Vect\{1, t\}$. Donner une base orthonormée de G.

(2) en déduire le projeté orthogonal de e^t sur G.

(3) Conclure.