**EXAMEN - 25 Mai 2016 - Première session**
Durée 3h

## Problème 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Soit $F$ le sous espace engendré par $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (-1, 1, 3)$

(1) Donner la base orthonormée de $F$ produite à partir $(u_1, u_2)$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Posons $w_1 = u_1$ puis

$$w_2 = u_2 - \langle u_1, u_2\rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} = (-1, 1, 3) - 2(1, 0, 1)\frac{1}{2} = (-2, 1, 2).$$

La famille $(w_1, w_2)$ est l'orthogonalisée de $\{u_1, u_2\}$. La base orthonormée associée est $\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\}$ soit

$$\boxed{\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\ ,\ \frac{1}{3}(-2, 1, 2)\}}.$$

(2) Quel est l'orthogonal $F^\perp$ de $F$ ?

Puisque nous sommes en dimension 3 et que $F$ est de dimension 2, l'orthogonal est un espace de dimension 1 qui est engendré par le produit vectoriel $w_1 \wedge w_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, -4, 1)$, donc $\boxed{F^\perp = vect(-1, -4, 1)}$

(3) Donner la matrice de projection orthogonale sur $F$ écrite dans la base canonique.

Posons $w_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, -4, 1)$. $F^\perp$ étant de dimension 1, engendré par $w_3$, il est plus commode de trouver d'abord la projection sur $F^\perp$ par la formule

$$P_{F^\perp}(X) = \langle X, w_3\rangle w_3$$

ce qui donne, en testant sur les vecteurs de la base canonique,

$$\mathcal{M}_{P_{F^\perp}} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 16 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, d'après la relation $P_F = Id - P_{F^\perp}$ on en déduit

$$\boxed{\mathcal{M}_{P_F} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 17 \end{pmatrix}.}$$

## Problème 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de classe $C^2$ définie par

$$f(x, y) = \cos(y)\ln(1 + x^2) + y^2$$

(1) Calculer le vecteur gradient $\nabla f(x, y)$ et la matrice Hessienne $Hf(x, y)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Un simple calcul donne

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \Big(\cos(y)\frac{2x}{1 + x^2} \quad , \quad -\sin(y)\ln(1 + x^2) + 2y\Big)}$$

et

$$\boxed{Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y)\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} & -\sin(y)\frac{2x}{1+x^2} \\ -\sin(y)\frac{2x}{1+x^2} & -\cos(y)\ln(1 + x^2) + 2 \end{pmatrix}.}$$

(2) Montrer que $(0, 0)$ est point critique de $f$ et determiner sa nature.

On a $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ donc $(0, 0)$ est point critique. De plus,

$$\boxed{Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},}$$

qui est clairement définie positive, et donc $\boxed{(0, 0) \text{ est un point minimum pour } f}$.

(3) Trouver un point critique $(x_0, y_0)$ différent de $(0, 0)$ tel que $0 \le y_0 \le \pi$.

Pour avoir $\nabla f = (0, 0)$ on doit avoir $\cos(y)\frac{2x}{1+x^2} = 0$. Posons $y_0 = \frac{\pi}{2}$ de sorte que la première coordonnée s'annule. Alors pour trouver $x_0$ on utilise la deuxième coordonnée de $\nabla f$ qui doit aussi être nulle, qui donne

$$-\sin(y_0)\ln(1 + x_0^2) + 2y_0 = 0$$

soit

$$\ln(1 + x_0^2) = \pi$$

et donc $x_0 = \sqrt{e^\pi - 1}$ (un autre choix, moins naturel, aurait pu être $-\sqrt{e^\pi - 1}$). Donc

$$\boxed{(x_0, y_0) = (\sqrt{e^\pi - 1}, \frac{\pi}{2})}.$$

(4) Determiner la nature du point critique trouvé à la question (3).

On a

$$\boxed{Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix},}$$

avec $\alpha = \frac{2\sqrt{e^\pi - 1}}{e^\pi} > 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X - \alpha^2$, de discriminent $4 + 4\alpha^2 > 0$, qui admet les deux racines réelles $1 + \sqrt{1 + \alpha^2}$ et $1 - \sqrt{1 + \alpha^2}$ de signe contraire. $\boxed{\text{C'est donc un point selle}}$.

**Problème 3**

(1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, l'intégrale

$$\int_0^1 x e^{2i\pi nx} dx.$$

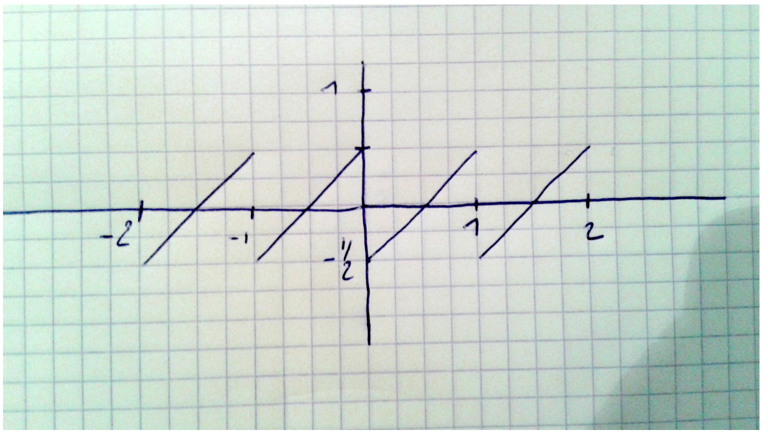
En faisant une intégration par parties on trouve

$$\boxed{\int_0^1 x e^{2i\pi nx} dx = \frac{1}{2i\pi n}}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $C^1$ par morceaux et 1-périodique définie par

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{1}{2} & \text{pour tout } x \in [0,1[, \\ f(x+1) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(2) Représenter graphiquement $f$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.




(3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe de $f$ noté $\widehat{f}_n$.

$\widehat{f}_n = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx = \frac{-1}{2i\pi n}$ si $n \neq 0$ et $\widehat{f}_0 = 0$.

(4) En déduire, grâce au théorème de Dirichlet, l'identité suivante:

$$\text{pour tout } x \in ]0,1[, \qquad \frac{1}{2} - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

La fonction $f$ étant $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique, et, puisque $f$ est continue sur $]0,1[$ on a

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{2i\pi nx}}$$

ce qui donne

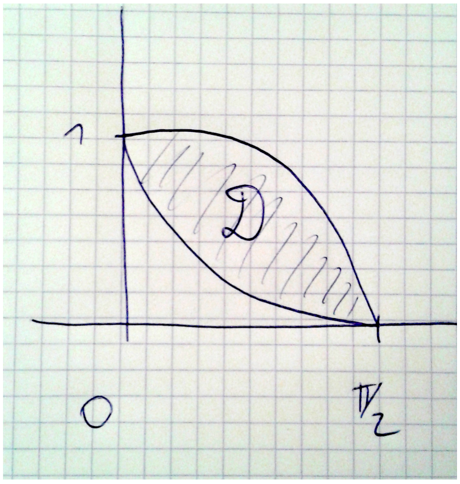
$$x - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-1}{2i\pi n} e^{2i\pi nx} + \frac{1}{2i\pi n} e^{-2i\pi nx} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\sin(2\pi n)}{\pi n}.$$

## Problème 4

(1) Faire un dessin du domaine quarrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^2 \leq y \leq \cos(x)\Big\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est compris entre la parabole convexe donnée par le graphe de la fonction $\frac{4}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})^2$ (qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et vaut 1 en 0), et la fonction $\cos(x)$ qui est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui donne le dessin suivant:




(2) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale double.

Puisque $\mathcal{D}$ est quarrable, le théorème de Fubini s'applique et donc

$$\begin{aligned}
Aire(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{D}} 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{4}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})^2}^{\cos(x)} dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - \frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^2 dx \\
&= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ \frac{4}{3\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boxed{1 - \frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$