TD Liste d'exercices no. 1

Espaces euclidiens

1. Notion de produit scalaire

Exercice 1.

(1) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2$$
est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Psi\big((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$
est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi(x, y) = 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3y_3,$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

(1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
(2) Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
(3) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soient a, b, c des paramètres réels et $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi(x, y) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3),$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

(1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
(2) Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
(3) Montrer que φ n'est jamais un produit scalaire quelque soit le choix des paramètres réels a, b et c.

Exercice 4. Les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, comme ci-dessous, sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}^3$:

(1) $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3$.
(2) $\varphi_2(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$.
(3) $\varphi_3(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3 + x_3y_1 + x_1y_3$.
(4) $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_3 + y_1x_3$.

On précisera à chaque fois la matrice associée à φ_k.

Exercice 5. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + (a+12)x_3y_3 - 3x_1y_3 - 3y_1x_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est un produit scalaire.

Exercice 6. Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(X;Y) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j),$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

(1) Φ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
(2) Soit E le sous-espace vectoriel

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

La restriction de Φ à E est-elle un produit scalaire?

Exercice 7.

(1) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n nombres réels Montrer l'inégalité

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour quelle valeur des x_i a-t-on égalité?
(2) Montrer que pour toute fonction continue sur $[-1,1]$, on a

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\Big| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt, projections et symétries

Exercice 8. Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $u_1 = (1,-2,-2)$, $u_2 = (-1,0,-1)$ et $u_3 = (5,-3,7)$.

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+y-z-t &= 0 \end{cases}$$

(1) Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$, l'orthogonal de F.
(2) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

(1) On définit l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par
$$\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt.$$
Montrer que l'application Φ définit un produit scalaire sur E.

(2) Calculer une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré par $1, X$ et X^2.

Exercice 11. A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre
$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\, dt + P(0)Q(0).$$

(1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 12. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire ϕ défini sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par
$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

(1) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 13. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1, 0, 3)$ et $v_2 = (0, 2, 5)$.

(1) Construire une base orthonormée de F. Quel est l'orthogonal $F^\perp$ de F?

(2) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3) Mêmes questions lorsque F est défini par l'équation $2x + 3y - 4z = 0$.

Exercice 14. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y + z = 0$.

(1) Chercher une base orthonormée de $F^\perp$.

(2) Soit p_1 et p_2 les projecteurs orthogonaux sur $F^\perp$ et F. Calculer $p_1(v) + p_2(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de p_1 et la matrice de p_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $d_1 = \mathrm{dist}(u, F)$ et $d_2 = \mathrm{dist}(u, F^\perp)$ et vérifier la relation
$$d_1^2 + d_2^2 = \|u\|^2.$$

Exercice 15. Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire
$$\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

(1) Construire à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E une base orthonormée (P_1, P_2, P_3). En déduire l'orthogonal du sous-espace F engendré par $1, X$.
(2) Calculer la projection orthogonale du polynôme $Q(X) = 1 + X + X^2$ sur le sous-espace vectoriel F.
(3) Calculer

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \Big(\sin(x) - a - bx - cx^2\Big)^2 \, dx.$$

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque. Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

Exercice 18. Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 19. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - z + \sqrt{2}t &= 0 \\ x - 3z &= 0 \end{cases}$$

(1) Déterminer $F^\perp$.
(2) Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.
(3) Calculer la projection orthogonale du vecteur $V = (1, 1, 1, 1)$ sur F.
(4) Calculer la distance de V à F et la distance de V à $F^\perp$.

Exercice 20. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

(1) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, 1, 0), \quad V_2 = (0, 1, -1, 0), \quad V_3 = (0, 2, 3, 1),$$

puis compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
(2) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

3. Isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, reduction des matrices symétriques, produit vectoriel

Exercice 21. Montrer que chacune des matrices suivantes représente une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, dont on déterminera l'axe et l'angle correspondant:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 22. Etudier les endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ représentés dans une base orthonormale par les matrices:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

S'il s'agit de rotations, en déterminer l'axe et l'angle.

Exercice 23. Diagonaliser dans une base orthonormée les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 24. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que f est diagonalisable sur une base orthonormée.
(2) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle f se diagonalise.

Exercice 25. Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que $f_{a,b}$ est diagonalisable sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
(2) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ sur laquelle $f_{a,b}$ se diagonalise.

Exercice 26. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que M est orthogonale.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice f est diagonale.

Exercice 27. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier sans aucun calcul l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP$.
(2) Calculer un tel couple de matrices (D, P).

Exercice 28. Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2)\,;\; v_2 = (-2, 2, k)\,;\; w = v_1 \wedge v_2.$$

(1) Sans calculer w, répondre aux questions suivantes:
 (a) A quelle condition sur k a-t-on $w \neq 0$?
 (b) A quelle condition sur k le système (v_1, v_2, w) est-il une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$?
(2) Calculer w.
(3) Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. A quelle condition sur k a-t-on $\dim(F) = 2$? Dans ce cas, donner une équation de F.

Exercice 29. Soit k un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et soit R la rotation vectorielle d'angle θ et d'axe la droite vectorielle engendrée par k et orientée par k. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a

$$R(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)k \wedge x + 2\langle x, k\rangle \sin^2(\frac{\theta}{2})k.$$

Exercice 30. On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

(1) Donner les normes de u et v et leur produit scalaire.
(2) Trouver la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal, noté p, sur le plan vectoriel P engendré par u et v.
(3) Trouver un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et en déduire une équation du plan P.
(4) Soit $u' = (1, 0, 1)$. Calculer l'angle entre u' et $p(u')$.