TD Liste d'exercices no. 2
Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions

Exercice 1. Etudier la convergence sur $I \subset \mathbb{R}$ (simple ou uniforme) des suites de fonctions suivantes

(1) $f_n(x) = nx^n$, $I =]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$
(2) $g_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$, $I = \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$
(3) $h_n(x) = x^{\frac{1}{n}}\cos(nx)$, $I = \mathbb{R}^+_*$, $n \in \mathbb{N}^*$
(4) $m_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$, $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2. Soit $\alpha \geq 0$. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur $[0,1]$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha g_n(x) \quad \text{où} \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1-\frac{2}{n}] \ ; \\ x - 1 + \frac{2}{n} & \text{si} \quad x \in]1-\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}] \ ; \\ 1-x & \text{si} \quad x \in]1-\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

(1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.
(2) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$ pour $0 < a < 1$.
(3) Pour quelles valeurs de α y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
(4) Étudier la limite de $\int_0^1 f_n(x)dx$ lorsque $n \to +\infty$ en fonction de α.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt} \quad \text{et} \quad Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)\,dt.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions P_n et Q_n sont polynomiales.
(2) Montrer que, pour tout $\delta \in]0,1]$, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 1 sur $[\delta,1]$, et vers -1 sur $[-1,-\delta]$.
Indication : utiliser l'inégalité $\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \geq \int_0^1 (1-t)^n\,dt$.
(3) Montrer que $(Q_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

2. Séries de fonctions

Exercice 4. Etudier la convergence sur $I \subset \mathbb{R}$ (simple ou normale) des séries de fonctions suivantes

(1) $\sum f_n$ avec $f_n(x) = x^n\sin(nx)$, $I =]-1,1[$
(2) $\sum g_n$ avec $g_n(x) = x^n\sin(nx)$, $I =]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$
(3) $\sum h_n$ avec $h_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{1+n^2}$, $I = \mathbb{R}$
(4) $\sum m_n$ avec $m_n(x) = e^{n\sin(x)}$, $I =]\pi, \frac{3\pi}{2}[$