TD Liste d'exercices no. 3

Fonctions de plusieurs variables

1. Continuité, dérivabilité

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur domaine de définition et calculer leurs dérivées partielles en tout point où elles existent :

(1) $f_1(x, y) = x^2 \exp(xy)$
(2) $f_2(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
(3) $f_3(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$
(4) $f_4(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 3. Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \|x\|$ (norme euclidienne) est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall x \neq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x), h \rangle = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}.$$

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) f est-elle continue en $(0, 0)$?
(2) f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

Exercice 5. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer. En déduire que f ne peut être de classe C^2 en $(0, 0)$.

Exercice 6. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En un point $p \in \mathbb{R}^2$, on connaît les valeurs des dérivées directionnelles suivantes :

$$D_v f(p) = 1 \text{ et } D_w f(p) = 2 \ ,$$

où $v := (2,3)$ et $w := (1,1)$.

Calculer le gradient de f au point p. Selon quelle direction la dérivée directionnelle de f est-elle maximale au point p? Quelle est la valeur de cette dérivée directionnelle ?

Exercice 7. La hauteur d'une montagne sur le niveau de la mer est donnée par une fonction $f(x,y)$. Au point $(p, f(p))$ de la montagne, un randonneur remarque que la pente en direction nord vaut $\frac{-1}{4}$ et la pente en direction est vaut $\frac{-1}{2}$.

À partir du point $(p, f(p))$, quelle est la direction vers laquelle le randonneur doit marcher pour effectuer la descente la plus rapide ?

Exercice 8. Calculer le gradient de la fonction

$$f(x,y) := \log(x^2 + 2y + 1) + \int_0^x \cos^2(t^2)dt \ , \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

au point $(\sqrt{\pi}, 1)$

2. Recherche d'extrema

Exercice 9. Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minimas locaux, des maxima locaux ou des points selles.

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, montrer que $(0,0)$ est un point critique, et étudier sa nature.

(1) $f_1(x,y) = x^2 - xy + y^2$
(2) $f_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$
(3) $f_3(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2$
(4) $f_4(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$
(5) $f_5(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x^4$
(6) $f_6(x,y) = 1 + xy + x^2$
(7) $f_7(x,y) = -4 + x^2 + y^3$

Exercice 11. (Réfraction.) On munit le plan du repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Étant donnés trois réels $a, b, c > 0$, on définit les points $A(0, a), B(b, -c)$. Pour tout $x \in [0, b]$, on définit le point $M(x, 0)$, et les angles de vecteurs

$$\alpha_1 = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{MA}), \quad \alpha_2 = (-\overrightarrow{j}, \overrightarrow{MB}).$$

On considère un rayon lumineux parcourant la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M, et v_2 de M à B.

(1) Faire un dessin.
(2) Exprimer le temps de parcours du rayon lumineux, en fonction de x. On le note $T(x)$.
(3) Justifier qu'il existe au moins un $x \in [0, b]$ pour lequel $T(x)$ est minimal.
(4) Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

3. Intégrales à paramètres

Exercice 12. Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par: $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, dx.$

(1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
(2) Montrer que F est strictement décroissante et convexe.
(3) Montrer que l'on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} F(t) = +\infty$.

Exercice 13. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par: $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + te^x)\, dx.$

(1) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.
(2) Donner une expression sans intégrale de $F'(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

Exercice 14.

(1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx$ converge.

On définit l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$

(2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
(3) Montrer que: $\forall t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = -\dfrac{t}{2} F(t)$.
(4) En déduire une expression explicite de $F(t)$.

Exercice 15. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx)\, dx.$

(1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(2) Calculer $F'(0)$.

Exercice 16. Considérons la fonction suivante:

$$f(s,t,x) := (s-t)x^2 + (1-s)t^2\sin(x) \ ,$$

pour tout $(s,t,x) \in [0,1] \times [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

(1) Posons $G(s,t) := \int_0^{\pi/2} f(s,t,x)dx$.
- En tant que fonction de t, peut-on appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres à $G(s,\cdot)$? Pourquoi ? Calculer la dérivée de la fonction G en tant que fonction de t.
- En tant que fonction de s, peut-on appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres à $G(\cdot,t)$? Pourquoi ? Calculer la dérivée de la fonction G en tant que fonction de s.

(2) Donner le vecteur gradient de la fonction $G(s,t)$.
(3) Calculer la matrice hessienne de la fonction $G(s,t)$.
(4) Quels sont les points critiques de la fonction $G(s,t)$?
(5) Déterminer la nature des points critiques de la fonction $G(s,t)$.