TD Liste d'exercices no. 4

Séries de Fourier

1. Développement en série de Fourier

Exercice 1. Soit la fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique et C^1 par morceaux telle que $f(x) := x$, pour tout $x \in [0, 1[$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(2) Écrire la série de Fourier de f.
(3) Quel est le rapport entre la fonction f et sa série de Fourier ?
(4) En déduire la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. Soit la fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique et C^1 par morceaux telle que $f(x) := x^2$, pour tout $x \in [0, 1[$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(2) Écrire la série de Fourier de f.
(3) Quel est le rapport entre la fonction f et sa série de Fourier ?
(4) En appliquant l'exercice précédent et l'identité de Parseval, calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3. Développer en série de Fourier les fonctions 1-périodiques C^1 par morceaux définies de façon suivante:

a) $a(x) = |x|$ pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
b)
$$b(x) := \begin{cases} 1 & \text{, si } -1/2 \leq x \leq 0 \\ x & \text{, si } 0 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$$
c) $c(x) := x^3$ pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
d) $d(x) := |x - \frac{1}{2}|$ pour $x \in [0, 1[$.
e) $e(x) := |\sin(\pi x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$.
f) $f(x) := |\cos(2\pi x)|$ pour $x \in [0, 1]$.
g) $g(x) := x + 1$ pour $x \in [0, 1[$.

Exercice 4. Calculer les coefficients de Fourier complexes des fonctions de l'exercice 3.

Exercice 5. Soit la fonction 1-périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} -1 & , \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 1 & , \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) Calculer la série de Fourier associée à f.

(2) Phénomène de Gibbs: montrer que

$$S_{2n+1}(\frac{1}{4n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx,$$

et interpréter ce résultat sur le graphique ci-dessous en admettant que $\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx > 1$.

graph.jpg

Exercice 6. Soit la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier *réels* de la fonction f.

(2) En déduire les coefficients de Fourier *complexes* de f.

Exercice 7. Étant donné $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction suivante

$$f(x) := \cos(t \sin(\pi x)) \text{ , pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que f est une fonction paire et 1-périodique.
(2) Écrire les coefficients et la série de Fourier de f.
(3) Prouver l'identité

$$ta_0(t)'' + a_0(t)' + ta_0(t) = 0.$$

Exercice 8. Soit la fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique telle que $f(x) := x$, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(2) Quel est le rapport entre la fonction f et sa série de Fourier ?
(3) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 9. Soit la fonction $f(x) := 2x$ pour tout $x \in [0, 1/2]$.

(1) Écrire l'extension paire 1-périodique de f. On la note f_p.
(2) Calculer la série de Fourier de f_p.
(3) Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
(4) En appliquant l'identité de Parseval, prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercice 10. Soit la fonction $f(x) := x^2$ pour tout $x \in [0, 1/2[$.

(1) Écrire l'extension impaire 1-périodique de f. On la note f_i.
(2) Calculer la série de Fourier de f_i.
(3) Idem avec son extension paire f_p.

Exercice 11. Soit la fonction $f(x) := e^x$ définie sur $[0, 1[$.

(1) Calculer le développement en série de Fourier en termes uniquement de cosinus.
(2) Calculer le développement en série de Fourier en termes uniquement de sinus.

Exercice 12. Supposons que f est une fonction dérivable toutes les fois nécessaires (on dit *de classe* $\mathcal{C}^\infty$). Supposons que f est périodique de période 1.

(1) Établir la relation suivante entre les coefficients de Fourier de f et de ses dérivées:

$$b_n(f) = \frac{a_n(f^{(k)})}{(2\pi n)^k} = -\frac{b_n(f^{(k+1)})}{(2\pi n)^{k+1}} \text{ ,}$$

pour tout nombre impair $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>*Indication*</u>: *Calculer $a_n(f')$ en intégrant par parties, puis $b_n(f'')$, puis $a_n(f''')$ et ainsi de suite.*

(2) Utiliser cette relation pour calculer le développement en série de Fourier de la fonction 1-périodique qui vérifie $f(x) := x^5 - 7x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 4$ entre 0 et 1.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et 1-périodique. Montrer que sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. *Indication : montrer la convergence normale de la série de Fourier en écrivant $|\hat{f}_n| = \frac{1}{2n}|\hat{f'}_n|$ puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

2. Équations aux dérivées partielles

Exercice 14. [Méthode de Fourier pour l'équation d'ondes] Considérons l'équation

$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x) \quad \text{ et } u(t,0) = u(t,\frac{1}{2}) \text{ avec } c > 0$$

associée aux faibles mouvements d'une corde tendue fixée en ses extrémités d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, où $u(x,t)$ désigne la hauteur du point de la corde d'abscisse x à l'instant t.

(1) Pour tout t fixé, on prolonge $u(t,x)$ de façon impair 1-périodique pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $u(t,x)$ ainsi prolongée vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(2) Montrer que si u est une solution C^2, alors $u = \sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin(2\pi n x)$ où la série converge normalement et b_n vérifie l'équation différentielle $b_n'' + 4c^2\pi^2 n^2 b_n = 0$.

(3) On se donne les conditions initiales suivantes,

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-péridodique, impaire, et de classe C^3 (autrement dit on lâche la corde avec vitesse initiale nulle, comme sur un piano). Montrer, en résolvant l'équation sur b_n donnée à la question (2), que l'unique solution de l'équation des ondes s'écrit

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big).$$