TD Liste d'exercices no. 5

Intégrales multiples, curviligne, et formes différentielles

1. Intégrales doubles

Exercice 1. Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x^2 \leqslant y \leqslant 1 + \frac{x^2}{2}\}$. Calculer

$$I := \iint_D (x^2 + x + 3)\, dx\, dy.$$

Exercice 2. Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

(1) Calculer (directement) $I := \iint_D (x - y)\, dx\, dy$.

(2) Calculer I au moyen du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 3. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

dans les deux cas suivants :

(1) D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$.

(2) D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Dans le deuxième cas, on vérifiera la formule de Fubini i.e. qu'intégrer suivant la variable x puis y donne le même résultat que si on intégre d'abord suivant la variable y puis x. [1]

Exercice 4. À l'aide d'un changement en coordonnées polaires, calculer

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy\,,$$

D étant défini par $x^2 + y^2 - 2x < 0$.

1. Résultat du 2. : $\dfrac{2\sqrt{2} - 1}{30\sqrt{2}}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x,y \geqslant 0\,;\, x+y \leqslant 1\}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_3 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid \; x^2+y^2 \geqslant 1\}.$$

$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{1}{y\cos x + 1}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_4 = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}].$$

$$I_4 = \iint_{D_4} xy\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x,y \geqslant 0\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\} \text{ avec } a,b > 0.$$

$$I_5 = \iiint_{D_5} z\,dx\,dy\,dz \quad \text{où} \quad D_6 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid \; y^2+z \leqslant 1\,;\, x^2+z \leqslant 1\}.$$

Exercice 6. Soit $D = [0,1]^2$. Calculer

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 7. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x,y \geqslant 0\,;\, x^2+y^2-2y \geqslant 0\,;\, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 8. On considère la double intégrale

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

où le domaine D est déterminé par les conditions suivantes

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2-y^2}, \quad y \geqslant 0,$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

(1) Tracer les contours du domaine D dans le plan.

(2) Trouver les bornes d'intégration :
   (i) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à x.
   (ii) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à y.

(3) Calculer l'intégrale I pour $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

Exercice 9. Calculer

$$\iint_D \sqrt{1-a^2x^2-b^2y^2}\,dxdy,$$

où $a,b > 0$ et D est défini par $a^2x^2 + b^2y^2 < 1$.

Exercice 10. Soit D la partie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par l'axe des x et par l'arche de cycloïde d'équation $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\iint_D y \, dxdy \, .$$

Exercice 11. Calculer l'aire du domaine borné D de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe d'équation

$$x = a(\cos(mt) - m\cos(t)) \, , \quad y = a(\sin(mt) - m\sin(t)) \, , \quad t \in \mathbb{R} \, ,$$

où $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Exercice 12. Calculer l'aire intérieure à la cardioïde d'équation polaire

$$\rho = \alpha(1 + \cos\theta) \, ,$$

où $\alpha > 0$.

2. Intégrales triples

Exercice 13. Calculer

$$\iiint_D xyz \, dxdydz \, ,$$

où D est le domaine déterminé par $x + y + z < 1$, $x > 0$, $y > 0$, et $z > 0$.

Exercice 14. Calculer

$$\iiint_D z^2 \, dxdydz \, ,$$

où D est le domaine déterminé par $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

Exercice 15. Calculer le volume du domaine D défini par

$$x^2 + y^2 - 2z < 0 \, , \quad z < 1 \, .$$

Exercice 16. Calculer le volume du domaine D défini par

$$x^2 + y^2 - x < 0 \, , \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1 \, .$$

3. Intégrales curvilignes

Exercice 17. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On considère l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma y^2\, dx + x^2\, dy\,,$$

où Γ est le quart d'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,$$

orienté du point $(a, 0)$ vers le point $(0, b)$.

(1) Calculer I.

(2) A l'aide de formule de Green-Riemann appliquée au domaine D défini par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\,, \quad x > 0\,,\ y > 0\,,$$

calculer une nouvelle fois I.

Exercice 18. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$1/2 < x^2 + y^2 < 2\,.$$

On considère sur D la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy\,.$$

(1) La forme ω est-elle fermée ?

(2) Calculer

$$\int_\Gamma \omega\,,$$

où Γ est le cercle de rayon 1 centré en $(0, 0)$ orienté dans le sens direct.

(3) La forme ω est-elle exacte ?

Exercice 19. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$x + y > 0\,.$$

On considère sur D la forme différentielle

$$\omega = \frac{3x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx - \frac{3y^3 + x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\,.$$

(1) Montrer que la forme ω est exacte.

(2) Calculer une primitive de ω.

(3) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En déduire la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \omega\,,$$

où Γ est le quart d'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,$$

orienté du point $(a, 0)$ vers le point $(0, b)$.