Université Paris Diderot
L2 Algèbre et analyse approfondies

Contrôle de connaissance du 18 mars 2017

Les documents sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 20\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions. Les trois parties sont indépendantes.*

Partie I : espace de Minkowski

Le but de cette partie est d'étudier l'espace de Minkowski, qui est un outil important dans la relativité restreinte.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire suivante

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad b((t, x, y, z), (t', x', y', z')) = ctt' - xx' - yy' - zz',$$

où c est une constante strictement positive, représentant la vitesse de la lumière. Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à b, définie comme

$$q(t, x, y, z) = b((t, x, y, z), (t, x, y, z)) = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Rappelons que, si v et v' sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, alors la relation suivante est vérifiée

$$q(v + v') = q(v) + q(v') + 2b(v, v').$$

On désigne par Σ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}$ tels que $q(v) > 0$, appelé *cône de lumière*. Soit Σ_+ l'ensemble des vecteurs $v = (t, x, y, z)$ dans Σ tels que $t > 0$, appelé *cône de lumière futur*.

1. La forme bilinéaire b est-elle symétrique ?

2. La forme bilinéaire b est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$?

3. Montrer que, si $v \in \Sigma_+$, alors $\lambda v \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda > 0$.

4. Montrer que, si v et v' sont deux vecteurs dans Σ_+, alors $b(v, v') > 0$. (*Indication : écrire v et v' comme (t, u) et (t', u') respectivement, où u et u' appartiennent à $\mathbb{R}^3$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^3$*)

5. En déduire que, pour tout couple $(v, v') \in \Sigma_+^2$, on a $v + v' \in \Sigma_+$.

6. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel quel $\lambda v + w \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

7. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe au moins un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q(\lambda v + w) \leqslant 0$. (*Indication : on peut considérer la première coordonnée du vecteur* $\lambda v + w$)

8. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer que

$$b(v,w)^2 \geqslant q(v)q(w).$$

(*Indiction : on peut utiliser le fait que la fonction quadratique* $\lambda \mapsto q(\lambda v + w)$ *prend au moins une valeur non-positive*)

9. Soient v un élément de Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$ tel que $b(v,w) = 0$. Montrer que $q(w) \leqslant 0$. (*Indication : utiliser la question précédente*)

10. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs dans Σ_+. Montrer que

$$q(v_1 + v_2)^{1/2} \geqslant q(v_1)^{1/2} + q(v_2)^{1/2}.$$

Partie II : série de Fourier d'une fonction trigonométrique

Le but de cette partie est de calculer les limites

$$\alpha = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \cos(x^2)dx \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \sin(x^2)dx.$$

Soit f la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \,[0,1[\,, \quad f(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x^2}.$$

11. Montrer que les intégrales

$$\int_1^T \cos(x^2)dx \quad \text{et} \quad \int_1^T \sin(x^2)dx$$

convergent lorsque T tend vers l'infini. En déduire que les limites α et β existent. (*Indication : on peut effectuer un changement de variables* $y = x^2$ *puis faire appel à l'intégration par parties*)

12. Montrer que le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la fonction f est

$$c_n(f) = \mathrm{e}^{-\pi i n^2/2} \int_{-n/2}^{1-n/2} \mathrm{e}^{2\pi i t^2} dt.$$

13. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$c_{2p}(f) = \int_{-p}^{1-p} \mathrm{e}^{2\pi i t^2} dt, \quad c_{2p+1}(f) = -i \int_{-p-1/2}^{-p+1/2} \mathrm{e}^{2\pi i t^2} dt.$$

14. Montrer que la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

15. En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer que

$$f(0) = (1-i) \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{2\pi i t^2} dt$$

16. Montrer que

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi/2}.$$

On peut écrire la limite

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{2\pi i t^2} dt$$

en fonction de α et β par un changement de variables.

Partie III : fonction Γ

On considère la fonction $\Gamma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

17. Montrer que la fonction Γ est bien définie et est continue sur $]0, +\infty[$. (*Indication : considérer les deux intégrales* $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ *et* $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ *respectivement*)

18. Montrer la relation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

pour tout $x > 0$.

19. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

20. Montrer que la fonction Γ'' est strictement positive et que la fonction Γ est convexe.

Fin de l'épreuve