Université Paris Diderot
L2 Algèbre et analyse approfondies

Contrôle de connaissance du ? ? mai 2017

Les documents sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 20\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions. Les trois parties sont indépendantes.*

Première partie

Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si A est une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, sa fonction caractéristique est par définition le polynôme

$$\chi_A(t) := \text{dét}\,(tI - A), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $I \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'identité. On écrit $\chi_A(t)$ sous la forme

$$\chi_A(t) = t^n - c_1(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n(A).$$

Rappelons que l'on a $c_1(A) = \mathrm{Tr}(A)$ et $c_n(A) = \text{dét}\,(A)$.

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $\text{dét}\,(I + tA)$ en fonction de $c_1(A), \ldots, c_n(A)$ et t.

2. Déterminer les dérivées partielles de la fonction dét en I.

3. Soit M une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$ qui est inversible. Déterminer les dérivées partielles de la fonction dét en M.

4. Montrer que la fonction dét est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.

Deuxième partie

Soient I un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ et $r : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère deux applications de I dans $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\forall\, t \in I, \quad e(t) := (\cos(t), \sin(t)), \quad n(t) := (-\sin(t), \cos(t)).$$

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ l'application qui envoie $t \in I$ sur $r(t)e(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$.

5. Montrer que l'application γ est de classe C^2 et

$$\gamma'(t) = r'(t)e(t) + r(t)n(t).$$

6. En déduire que l'application γ est régulière en $t \in I$ (c'est-à-dire $\gamma'(t) \neq 0$) si et seulement si $r(t)$ et $r'(t)$ ne s'annulent pas simultanément.

7. Montrer que la courbure en un point régulier de γ est donnée par la formule

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r' - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

8. Calculer la longueur de γ sur un intervalle fermé $[a, b] \subset I$, donnée par la formule

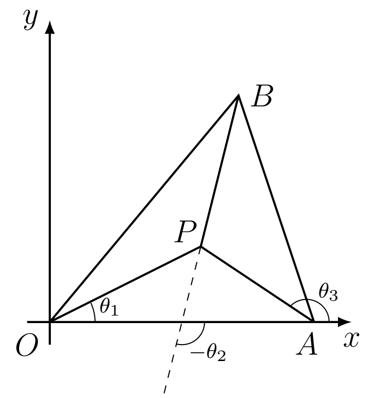
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

9. On suppose que $I = \mathbb{R}$, $r(t) = 1 + \cos(t)$. Calculer la courbure de γ en tout point régulier.

10. Calculer la longueur de la courbe dans la question précédente sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Troisième partie

Dans cette partie, on considère un triangle $\Delta = OAB$ inscrit dans un plan muni d'un système de coordonnées comme dans le graphe au-dessous.



On suppose que le point O est placé à l'origine $(0, 0)$ du plan, et que les points A et B sont de coordonnées $(a, 0)$ et (b, c) respectivement, où a, b et c sont des constantes telles que $0 < b < a$ et $c > \sqrt{ab - b^2}$ (de sorte que les trois angles de Δ soient tous aigus). On munit le plan de la norme $\|.\|$ telle que

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rappelons que si $v = (x, y)$ est un vecteur non-nul dans le plan et si $\theta \in [-\pi, \pi[$ désigne l'angle entre v et l'abscisse Ox, alors on a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta).$$

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant. étant donné un point P dans le triangle Δ, quand est-ce que la somme des distances entre P et les trois sommets du triangle atteint son minimum ? Pour étudier ce problème, on introduit une fonction S définie sur le triangle Δ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui envoie tout $(x, y) \in \Delta$ en

$$S(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} + \sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}.$$

11. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}$$

sur l'intérieur U de Δ.

12. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur U.

13. Pour tout point $P \in U$, soient $\theta_1(P)$ l'angle entre les vecteurs OP et Ox, $\theta_2(P)$ l'angle entre les vecteurs BP et Ox, et $\theta_3(P)$ l'angle entre les vecteurs AP et Ox. Exprimer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x}(P) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(P)$$

en fonction de $\theta_1(P)$, $\theta_2(P)$ et $\theta_3(P)$.

14. On suppose que $P \in U$ est un point critique de la fonction S. Montrer que

$$\big(\cos(\theta_1(P)) + \cos(\theta_2(P))\big)^2 + \big(\sin(\theta_1(P)) + \sin(\theta_2(P))\big)^2 = 1.$$

En déduire que $\cos(\theta_2(P) - \theta_1(P)) = -1/2$.

15. Montrer que la fonction S atteint son minimum sur Δ en un point P_0.

16. Soit $Q = (b, 0)$ la projection du point B sur le segment de droite OA. Montrer que la restriction de la fonction S au segment de droite OA atteint son minimal en Q.

17. Montrer que $S(b, \varepsilon) < S(Q)$ lorsque $\varepsilon > 0$ est assez petit. En déduire $S(Q) > S(P_0)$.

18. Montrer que P_0 appartient à l'intérieur U du triangle Δ.

19. Montrer que $\theta_3(P_0) - \theta_1(P_0) = \theta_1(P_0) - \theta_2(P_0) = 2\pi/3$.

20. En déduire que le point minimal P_0 de la fonction S est unique.

Fin de l'épreuve