Université Paris Diderot
L2 Algèbre et analyse approfondies

Contrôle de connaissance du 28 juin 2017
8h30-11h30, Halles aux faines, salle 12E

Les documents sur papier sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 20\}$, $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Première partie

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire suivante

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad b((t, x, y, z), (t', x', y', z')) = ctt' - xx' - yy' - zz',$$

où c est une constante strictement positive, représentant la vitesse de la lumière. Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à b, définie comme

$$q(t, x, y, z) = b((t, x, y, z), (t, x, y, z)) = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Rappelons que, si v et v' sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, alors la relation suivante est vérifiée

$$q(v + v') = q(v) + q(v') + 2b(v, v').$$

On désigne par Σ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}$ tels que $q(v) > 0$, appelé *cône de lumière*. Soit Σ_+ l'ensemble des vecteurs $v = (t, x, y, z)$ dans Σ tels que $t > 0$, appelé *cône de lumière futur*.

1. La forme bilinéaire b est-elle symétrique ?

2. La forme bilinéaire b est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$?

3. Montrer que, si $v \in \Sigma_+$, alors $\lambda v \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda > 0$.

4. Montrer que, si v et v' sont deux vecteurs dans Σ_+, alors $b(v, v') > 0$. (*Indication : écrire v et v' comme (t, u) et (t', u') respectivement, où u et u' appartiennent à $\mathbb{R}^3$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^3$*)

5. En déduire que, pour tout couple $(v, v') \in \Sigma_+^2$, on a $v + v' \in \Sigma_+$.

6. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel quel $\lambda v + w \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

7. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe au moins un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q(\lambda v + w) \leqslant 0$. (*Indication : on peut considérer la première coordonnée du vecteur $\lambda v + w$*)

8. Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer que

$$b(v,w)^2 \geqslant q(v)q(w).$$

(*Indiction : on peut utiliser le fait que la fonction quadratique* $\lambda \mapsto q(\lambda v + w)$ *prend au moins une valeur non-positive*)

9. Soient v un élément de Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$ tel que $b(v,w) = 0$. Montrer que $q(w) \leqslant 0$. (*Indication : utiliser la question précédente*)

10. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs dans Σ_+. Montrer que

$$q(v_1+v_2)^{1/2} \geqslant q(v_1)^{1/2} + q(v_2)^{1/2}.$$

Deuxième partie

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \, , \, \rangle$. On désigne par N la norme associée à ce produit scalaire, définie comme

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in E, \quad N(x) := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Rappelons que e_i désigne le vecteur dans $\mathbb{R}^3$ dont la $i^{\text{ième}}$ coordonnée est 1 et les autres coordonnées sont nulles.

On fixe un endomorphisme $\phi : E \to E$. On désigne par $g : E \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $x \in E$ sur $N(\phi(x))^2$. Soit ϕ^* l'adjoint de l'endomorphisme ϕ. Par définition ϕ^* est un endomorphisme de E tel que

$$\forall\, (x,y) \in E^2, \quad \langle \phi^*(x), y\rangle = \langle x, \phi(y)\rangle.$$

Soit $G : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ sur

$$g(x) - \lambda(N(x)^2 - 1).$$

11. Montrer que l'endomorphisme composé $\phi^* \circ \phi$ est auto-adjoint.

12. Montrer que toute valeur propre de $\phi^* \circ \phi$ est positive.

13. Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer sa différentielle en utilisant l'endomorphisme $\phi^* \circ \phi$.

14. Montrer que la fonction G est différentiable et déterminer sa différentielle.

15. Montrer que $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ est un point critique de la fonction G si et seulement si x est un vecteur propre de norme 1 de $\phi^* \circ \phi$ dont la valeur propre est λ.

16. Montrer que la fonction G est deux fois différentiable et déterminer sa hessienne.

17. Déterminer l'ensemble des points $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ tels que la hessienne $H_{(x,\lambda)}G$ de G en (x, λ) est une forme bilinéaire positive.

18. Soit λ_0 la valeur minimale de la restriction de la fonction g à l'ensemble

$$\{x \in E \,:\, N(x) = 1\}.$$

Soit x_0 un point dans E tel que $N(x_0) = 1$ et que $g(x_0) = \lambda_0$. Montrer que la restriction de la hessienne $H_{(x_0,\lambda_0)}G$ à $(\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R}) \times (\{x_0\}^\perp \times \mathbb{R})$ est positive.

19. Montrer que

$$DG(x_0, \lambda_0)(h, 0) = 0$$

pour tout $h \in \{x_0\}^\perp$ tel que $N(h) = 1$.

20. Montrer que (x_0, λ_0) est un point critique de la fonction G. En déduire que x_0 est un vecteur propre de $\phi^* \circ \phi$ de valeur propre λ_0.

Fin de l'épreuve