Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 1

1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *forme linéaire* toute application linéaire de V dans $\mathbb{R}$. On appelle *forme quadratique* toute combinaison linéaire de carrés de formes linéaires sur V. On dit qu'une forme quadratique $q(\cdot)$ sur V est *positive* si q est une fonction positive.

(a) Montrer que, si q est une forme quadratique, alors $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in V$.

(b) Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur V. Montrer que $\ell_1\ell_2$ est une forme quadratique.

(c) Déterminer si chacune des fonctions suivantes est une forme quadratique. Si c'est le cas, déterminer si elle est positive.

- ⋄ $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = xy$;
- ⋄ $q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $q(w) = |w|^2$;
- ⋄ $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + xyz$;
- ⋄ $q : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $q(A) = \text{dét}\,(A)$, où $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 2×2 ;
- ⋄ $q : M_{2\times2}(\mathbb{R})_s \to \mathbb{R}$, $q(A) = \text{tr}(A)^2 - 4\text{dét}\,(A)$, où $M_{2\times2}(\mathbb{R})_s$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrée réelles symétriques de taille 2×2 ;

(d) Soit q une forme quadratique sur V. Montrer l'égalité suivante :

$$\forall\,(v, w) \in V, \quad q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w).$$

(e) Soit q une forme quadratique sur V. Montrer que l'application $b : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$\forall\,(v, w) \in V, \quad b(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

est une forme bilinéaire symétrique sur V. Montrer que b est positive si et seulement si q est positive.

2. (a) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2$$

est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_2+y_1x_2+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_1+x_1y_3$$

est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = 2(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) + 3(x_2+x_3)(y_2+y_3) + x_3y_3,$$

où $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$.

(a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.

(c) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

4. Soient a, b, c des paramètres réels et $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3),$$

où $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$.

(a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.

(c) Montrer que φ n'est jamais un produit scalaire quelque soit le choix des paramètres réels a, b et c.

5. (a) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres réels Montrer l'inégalité

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i\Big| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour quelle valeur des x_i a-t-on égalité ?

(b) Montrer que pour toute fonction continue sur $[-1,1]$, on a

$$\Big|\int_{-1}^1 f(x)\,dx\Big| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^1 f(x)^2\,dx}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+y-z-t &= 0 \end{cases}$$

(a) Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.

(b) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

7. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant n$.

(a) On définit l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt.$$

Montrer que l'application Φ définit un produit scalaire sur E.

(b) Calculer une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré par $1, X$ et X^2.

8. Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire

$$\Phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

(a) Construire à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E une base orthonormée (P_1, P_2, P_3). En déduire l'orthogonal du sous-espace F engendré par $1, X$.

(b) Calculer la projection orthogonale du polynôme $Q(X) = 1 + X + X^2$ sur le sous-espace vectoriel F.

(c) Calculer

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \Big(\sin(x) - a - bx - cx^2\Big)^2 dx.$$

9. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.