Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 2

1. Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Montrer que les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{C}^n$.

(a) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{\ell^1} := |z_1| + \cdots + |z_n|$,

(b) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{\ell^2} := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$,

(c) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{\sup} = \max(|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

Parmi ces normes, quelles sont préhilbertiennes ?

2. Soient (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application. On suppose qu'il existe $\varepsilon \in [0, 1[$ tel que

$$\forall\, (x, y) \in X \times X, \quad d(T(x), T(y)) \leqslant \varepsilon d(x, y).$$

Montrer qu'il existe un unique point $x_0 \in X$ tel que $T(x_0) = x_0$.

3. Soit X, Y et Z trois espaces métriques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. On suppose que f est continue en un point $x \in X$ et que g est continue en $f(x)$. Montrer que l'application composée gf est continue en x.

4. 1) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < 1\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

3) Le sous-ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-il fermé ? Déterminer l'adhérence de A.

4) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. On désigne par Γ_f le sous-ensemble $\{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que Γ_f est un sous-ensemble fermé lorsque f est une fonction continue.

5. Soit $d \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tous points $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda\xi + (1 - \lambda)\eta) \leqslant \lambda f(\xi) + (1 - \lambda) f(\eta).$$

Si $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ est une famille de points de $\mathbb{R}^d$, on appelle *combinaison convexe* de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tout point de $\mathbb{R}^d$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_n\xi_n,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

(a) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction $\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe.

Dans le reste de l'exercice, on fixe une fonction convexe f définie sur $\mathbb{R}^d$. On fixe en outre un point $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(b) Soit h un élément de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$, qui envoie $t > 0$ en
$$\frac{f(\xi + th) - f(\xi)}{t},$$
est croissante.

(c) En déduire que, pour tout élément h de $\mathbb{R}^d$, la limite
$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\xi + th) - f(\xi)}{t}$$
existe dans $\mathbb{R}$.

(d) Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On désigne par A la famille des points de la forme $\xi + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_d e_d$, où $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. Montrer que tout point dans $B(\xi; 1) := \{\eta \in \mathbb{R}^d \, : \, \|\eta - \xi\|_{\sup} < 1\}$ est une combinaison convexe des points dans A.

(e) En déduire que la fonction f est bornée dans $B(\xi, 1)$.

(f) En déduire que la fonction f est continue.

(g) Montrer que, si la restriction de f à $B(\xi, 1)$ atteint son maximum, alors la fonction f est nécessairement constante sur $B(\xi, 1)$.

(h) Soit $\overline{B}(\xi, 1)$ la boule unité fermée $\{\eta \in \mathbb{R}^d \, : \, \|\eta - \xi\|_{\sup} \leqslant 1\}$. Montrer que la restriction de la fonction f à $\overline{B}(\xi; 1)$ atteint son maximum en un point η tel que $\|\eta - \xi\|_{\sup} = 1$.