Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 3

1. (a) Montrer que l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\sup}$ est complet.

(b) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application de classe C^1 telle que

$$\sup_{x\in\,]0,1[} |f'(x)| < 1.$$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On peut utiliser le résultat de la question 2 de la feuille d'exercice 2.

2. (*Méthode de Newton*) Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. On suppose que $\widehat{x} \in \,]a,b[$ est un point tel que $f(\widehat{x}) = 0$ et $f'(\widehat{x}) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de $\widehat{x}$ tel que, pour tout $x_0 \in U$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation recursive

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geqslant 0)$$

converge vers $\widehat{x}$.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ où $u_n(x) = (x^2+n^2)^{-1}$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On désigne par S la somme de cette série.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} S(x) = 0$.

4. Étudier les convergences simple ou uniforme des suites de fonctions.

(a) $f_n(x) = nx^n$ sur $]0,1[$, où $n \in \mathbb{N}$;

(b) $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ sur $[0,+\infty[$, où $n \in \mathbb{N}$;

(c) $f_n(x) = x^{1/n}\cos(nx)$ sur $]0,+\infty[$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$;

(d) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$ sur $\mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$;

(e) $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ sur $[0,1]$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

(f) $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ sur $[2,+\infty[$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

(g) $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$ sur $\mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

(h) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ sur $[0,1]$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

(i) $f_n(x) = nx/(1+n+x)$ sur $[0,1]$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

5. Étudier les convergences simple ou normale des séries de fonctions suivantes

(a) $\sum_{n\geqslant 1} x^n \sin(nx)$ sur $]-1,1[$;

(b) $\sum_{n\geqslant 1} x^n \sin(nx)$ sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$;

(c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\arctan(nx)}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}$;

(d) $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n\sin(x)}$ sur $]\pi,\frac{3\pi}{2}[$.

6. On considère la fonction $f(x) = x(1-x)$ sur $[0,1]$.

(a) Déterminer la série de Fourier de la fonction f.

(b) En utilisant le théorème de convergence de Dirichlet, montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x).$$

(c) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

(d) En utilisant l'égalité de Parseval, montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. Calculer leurs coefficients de Fourier complexes et réels des fonctions suivantes dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et déterminer leurs séries de Fourier.

(a) $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$;

(b) $f(x) = |\sin(\pi x)|$;

(c) $f(x) = |\cos(2\pi x)|$;

(d) $f(x) = x + 1$.

8. Étant donné $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction suivante

$$f(x) := \cos(t\sin(\pi x)) \text{ , pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que f est une fonction paire et 1-périodique.

(b) Écrire les coefficients et la série de Fourier de f.

(c) Prouver l'identité

$$ta_0(t)'' + a_0(t)' + ta_0(t) = 0.$$