Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 4

Dans cette feuille d'exercice, on désigne par S l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{1}_{]a,b]}$ et $I : S \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui envoie $\mathbb{1}_{]a,b]}$ sur $b-a$. On désigne par $\mathscr{L}^1(S,I)$ l'ensemble des fonctions intégrables par rapport à (S,I) (défini dans le cours). Si h est une fonction dans $\mathscr{L}^1(S,I)$, son intégrale $I(h)$ est notée $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx$.

Soient Θ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : \Theta \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que h est intégrable sur Θ si la fonction $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\widetilde{h}(x) = h(x)$ lorsque $x \in \Theta$ et $\widetilde{h}(x) = 0$ lorsque $x \in \Theta^c$, est intégrable. On désigne par $\int_{\Theta} h(x)dx$ le nombre $I(\widetilde{h})$.

1. (a) Soit a un nombre réel. En utilisant la suite décroissante $(\mathbb{1}_{]a-1/n,a]})_{n\geqslant 1}$, montrer que $\{a\}$ est un ensemble négligeable.

(b) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$.

(c) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que $\mathbb{1}_{[a,b]}$ et $\mathbb{1}_{]a,b[}$ sont des fonctions intégrables, et

$$I(\mathbb{1}_{[a,b]}) = I(\mathbb{1}_{]a,b[}) = b-a.$$

2. Soient a et b deux nombres réels, $a < b$. On appelle *subdivision* de $[a,b]$ toute famille $(a_i)_{i=0}^n$ de nombres reels telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Si $\Delta = (a_i)_{i=0}^n$ est une subdivision de $[a,b]$, on désigne par $\|\Delta\|$ le nombre $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |a_i - a_{i-1}|$. Si $h :]a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, pour toute subdivision $\Delta = (a_i)_{i=0}^n$ de l'intervalle $[a,b]$, on désigne par $h_{\Delta,1}$ et $h_{\Delta,2}$ les fonctions définies comme

$$h_{\Delta,1} := \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{x\in\,]a_{i-1},a_i]} h(x) \Big) \mathbb{1}_{]a_{i-1},a_i]}, \quad h_{\Delta,2} := \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in\,]a_{i-1},a_i]} h(x) \Big) \mathbb{1}_{]a_{i-1},a_i]}.$$

Ce sont des fonctions dans S. En outre, on désigne par $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\widetilde{h}(x) = h(x)$ si $x \in]a,b]$ et $\widetilde{h}(x) = 0$ sinon.

(1) Soit h une fonction bornée sur $]a,b]$. Montrer que

$$h_{\Delta,1} \leqslant \widetilde{h} \leqslant h_{\Delta,2}.$$

(2) On suppose que h s'étend par continuité en une fonction continue sur $[a,b]$. En utilisant la continuité uniforme, montrer que

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \|h_{\Delta,2} - h_{\Delta,1}\|_{\sup} = 0.$$

En déduire que la fonction $\widetilde{h}$ est intégrable.

(3) Soit $h :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\widetilde{h}$ est intégrable.

(4) Soit f une fonction bornée et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en dehors d'un intervalle borné. Montrer que la fonction f est intégrable.

3. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{1}_{]a,b]}f$ est intégrable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$). Si a et b sont deux nombres réels, $a \leqslant b$, on définit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := I(\mathbb{1}_{]a,b]}f), \qquad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut utiliser le théorème de convergence dominée.

(b) On fixe dans la suite un nombre réel a et on définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ comme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction F est continue.

(c) Montrer que, si la fonction f est continue, alors la fonction F est différentiable, et on a $F' = f$.

(d) Soit b un nombre réel, $b > a$. Soit en outre $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Montrer que

$$\varphi(a) \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leqslant \int_a^b \varphi(t) f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(a) \sup_{x\in[a,b]} F(x).$$

On peut commencer par le cas où $f \in S$. En déduire qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b \varphi(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(a) \int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(e) Application : montrer que, pour tout $h > 0$ fixé, on a

$$\lim_{a\to+\infty} \int_a^{a+h} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, qui converge vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose en outre que la suite $(I(|f_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(1) En utilisant le lemme de Fatou, montrer que les fonctions $\max(f, 0)$ et $-\min(f, 0)$ sont intégrables.

(2) En déduire que la fonction f est intégrable.

(3) La suite $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle nécessairement vers $I(f)$?

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, la fonction

$$(x > 0) \longmapsto \frac{n \ln(1 + x/n)}{(1 + x^2)^2}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{n \ln(1 + x/n)}{(1 + x^2)^2} dx$$

6. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}\times\,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x, t) = \ln(1 + t\mathrm{e}^x)$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $\varphi(x, \cdot) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est dérivable. Calculer sa dérivée.

(b) Montrer que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $\mathbb{1}_{]0,1]}(\cdot)\varphi(\cdot, t)$ est intégrable.

(c) Montrer que la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_{]0,1]} \varphi(x, t) dx \text{ pour tout } t \in]0, +\infty[$$

est dérivable, et donner une expression sans intégrale de F'.

7. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est intégrable.

(b) On définit une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(tx) dx.$$

Expliquer pourquoi la fonction F est bien définie.

(c) Montrer que F est dérivable et que $F'(t) = -\frac{t}{2} F(t)$.

(d) On admet que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Déterminer la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.