Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 5

1. On considère l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1x_2 + 5y_1y_2 - 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(a) Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'endomorphisme $\varphi_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit auto-adjoint.

(c) Pour chacune des valeurs a déterminées dans la questions précédentes, trouver les valeurs propres et les espaces propres de φ_a.

2. Soient E un espace euclidien, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriel de E. On désigne par p_1 et p_2 les projections orthogonales de E dans F_1 et F_2 respectivement, en les considérant comme des endomorphismes de E.

(a) L'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ est-il nécessairement auto-adjoint ?

(b) Monter que l'endomorphisme $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est auto-adjoint.

(c) Montrer que toute valeur propre de $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ appartient à $[0, 1]$.

(d) Montrer que $(F_1 + F_2^{\perp})^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2$.

(e) En déduire que $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable.

(f) Montrer que les valeurs propres de $p_1 \circ p_2$ appartiennent toutes à $[0, 1]$.

3. Soit E un espace vectoriel de rang fini sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Soit $\varphi : E \to E$ un endomorphisme auto-adjoint tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle x, \varphi(x) \rangle.$$

Montrer que φ est l'endomorphisme nul.

4. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

(a) Montrer que l'application $\varphi : E \to E$,

$$\varphi(P) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

est un endomorphisme auto-adjoint.

(b) Déterminer les valeurs propres de φ.

(c) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer les sous-espaces propres de φ.

5. Dans cet exercice, on considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé à la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme isométrique.

(b) Calculer le déterminant de φ.

(c) Montrer que 1 est une valeur propre de φ. Déterminer l'espace propre L associé.

(d) Montrer que L est une droite et φ est une rotation de l'axe L. Déterminer l'angle de la rotation.

(e) Décomposer φ en la composition de deux réflexions.

6. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) dont M est la matrice dans la base canonique.

(a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

(b) Montrer que f est auto-adjoint.

(c) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de f est diagonale.

7. Montrer que chacune des matrices suivantes représente une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, dont on déterminera l'axe et l'angle correspondant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$