Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 6

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur domaine de définition et calculer leurs dérivées partielles en tout point où elles existent :

(a) $f_1(x, y) = x^2 \exp(xy)$

(b) $f_2(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(c) $f_3(x, y) = (\sin x)^2 + (\cos y)^2$

(d) $f_4(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que g est de classe C^1 et vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

3. Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \|x\|$ (norme euclidienne) est de classe C^1, et

$$\forall x \neq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad Df(x)(h) = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}.$$

4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) f est-elle continue en $(0, 0)$?

(b) f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

5. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En un point $p \in \mathbb{R}^2$, on connaît les valeurs des dérivées partielles suivantes :

$$\partial_v f(p) = 1 \text{ et } \partial_w f(p) = 2 \ ,$$

où $v := (2, 3)$ et $w := (1, 1)$.

(a) Calculer la différentielle de f au point p.

(b) On considère la fonction suivant

$$(u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow \frac{\partial_u f(p)}{\|u\|},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle. Montrer que cette fonction atteint son maximum, et déterminer les points $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ où cette fonction atteint son maximum.

6. La hauteur d'une montagne sur le niveau de la mer est donnée par une fonction $f(x, y)$. Au point $(p, f(p))$ de la montagne, un randonneur remarque que la pente en direction nord vaut $\frac{-1}{4}$ et la pente en direction est vaut $\frac{-1}{2}$.
À partir du point $(p, f(p))$, quelle est la direction vers laquelle le randonneur doit marcher pour effectuer la descente la plus rapide ?

7. Calculer la différentielle de la fonction

$$f(x, y) := \log(x^2 + 2y + 1) + \int_0^x \cos^2(t^2)dt \text{ , pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

au point $(\sqrt{\pi}, 1)$.

8. Soit f la fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}.$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit Δ l'ensemble $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}.$$

(b) Montrer que la fonction g est de classe C^1 et déterminer sa différentielle.

(c) Quelle est la relation entre les fonctions f et g ?

(d) Soit x un nombre réel non-nul. Montrer que la fonction f ne possède pas de limite en (x, x). On peut par exemple considérer la suite $((x, x - 1/n))_{n \geqslant 1}$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \Delta$.

On désigne par $\widetilde{g}$ la fonction sur $\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) \cup \{(0, 0)\}$ telle que $\widetilde{g}(x, y) = g(x, y)$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et $\widetilde{g}(0, 0) = 0$.
Pour tout nombre réel $a \neq 1$, soit D_a la droite dans $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y = ax$. Soit en outre D_∞ la droite définie par l'équation $x = 0$.

(e) Montrer que, pour tout $a \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$, la restriction de $\widetilde{g}$ à la droite D_a est continue.

(f) Pour $r > 0$ fixé, calculer

$$\limsup_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left| \widetilde{g}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right|.$$

(g) En déduire que, pour tout $r > 0$

$$\sup_{\xi \in \Omega,\, \|\xi\|_{\ell^2} < r} |\widetilde{g}(\xi)| = +\infty.$$

(h) La fonction $\widetilde{g}$ est-elle continue sur Ω ? Justifier votre réponse.