Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2016-2017

Feuille d'exercice 7

1. Soit A une matrice à coefficients réels de taille $d \times d$ qui est symétrique. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels qui est symétrique. Montrer que A est définie positive si et seulement si $a+c > 0$ et $ac-b^2 < 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $f(x, y) = |x + y|$.

(a) Montrer que la fonction f est continue.

(b) Déterminer l'ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ des points où f est différentiable.

(c) Pour chaque point $P \in U$, déterminer $Df(P)$.

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2.$$

(a) Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de sa jacobienne par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de sa hessienne par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que $(-2, 8)$ est un minimum local de la fonction f.

(d) Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de la fonction f. Cependant il n'est ni un minimum local ni un maximum local de la fonction f.

(e) Montrer que, pour tout nombre réel $k \neq 0$, la restriction de la fonction f à la droite $y = kx$ possède $(0, 0)$ comme un minimum local.

5. On considère la fonction $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$ définie sur le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant \pi\}$$

(a) Montrer que D est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Déterminer son intérieur D°.

(b) Montrer que la fonction f est différentiable sur D° et déterminer sa différentielle en chaque point de D°.

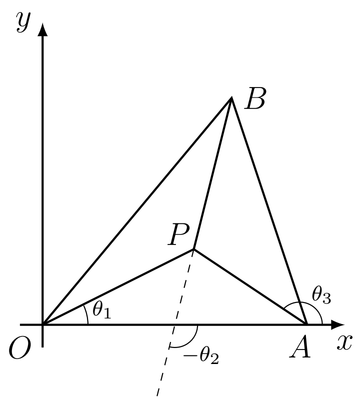
(c) Déterminer $\sup f(D)$ et $\inf f(D)$. Justifier votre réponse.

6. On considère un triangle $\Delta = OAB$ inscrit dans un plan muni d'un système de coordonnées comme dans le graphe au-dessous. On suppose que le point O est placé à l'origine $(0, 0)$ du plan, et que les points A et B sont de coordonnées $(a, 0)$ et (b, c) respectivement, où a, b et c sont des constantes telles que $0 < b < a$ et $c > \sqrt{ab - b^2}$ (de sorte que les trois angles de Δ soient tous aigus). On munit le plan de la norme $\|.\|$ telle que

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rappelons que si $v = (x, y)$ est un vecteur non-nul dans le plan et si $\theta \in [-\pi, \pi[$ désigne l'angle entre v et l'abscisse Ox, alors on a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\theta).$$



Le but de cet exercice est d'étudier le problème suivant : étant donné un point P dans le triangle Δ, quand est-ce que la somme des distances entre P et les trois sommets du triangle atteint son minimum ? Pour étudier ce problème, on introduit une fonction S définie sur le triangle Δ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui envoie tout $(x, y) \in \Delta$ en

$$S(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - b)^2 + (y - c)^2}.$$

(a) Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}$$

sur l'intérieur U de Δ.

(b) Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur U.

(c) Pour tout point $P \in U$, soient $\theta_1(P)$ l'angle entre les vecteurs OP et Ox, $\theta_2(P)$ l'angle entre les vecteurs BP et Ox, et $\theta_3(P)$ l'angle entre les vecteurs AP et Ox. Exprimer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x}(P) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(P)$$

en fonction de $\theta_1(P)$, $\theta_2(P)$ et $\theta_3(P)$.

(d) On suppose que $P \in U$ est un point critique de la fonction S. Montrer que

$$\big(\cos(\theta_1(P)) + \cos(\theta_2(P))\big)^2 + \big(\sin(\theta_1(P)) + \sin(\theta_2(P))\big)^2 = 1.$$

En déduire que $\cos(\theta_2(P) - \theta_1(P)) = -1/2$.

(e) Montrer que la fonction S atteint son minimum sur Δ en un point P_0.

(f) Soit $Q = (b, 0)$ la projection du point B sur le segment de droite OA. Montrer que la restriction de la fonction S au segment de droite OA atteint son minimal en Q.

(g) Montrer que $S(b, \varepsilon) < S(Q)$ lorsque $\varepsilon > 0$ est assez petit. En déduire $S(Q) > S(P_0)$.

(h) Montrer que P_0 appartient à l'intérieur U du triangle Δ.

(i) Montrer que $\theta_3(P_0) - \theta_1(P_0) = \theta_1(P_0) - \theta_2(P_0) = 2\pi/3$.

(j) En déduire que le point minimal P_0 de la fonction S est unique.