Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies

Partiel du 20 mars 2018
10h45-12h45, Halles aux faines, Amphi 5C

Les documents sur papier sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté d'exercices, vue comme une fonction du numéro d'exercices, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tout $(i,j)^2 \in \{1,\ldots,20\}$ tel que $i<j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Le but du partiel est d'étudier des propriétés des miroirs réfléchissants par le calcul différentiel. Dans toute l'épreuve on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $\langle\,,\,\rangle$, défini par

$$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \forall\, y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \langle x,y\rangle := x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^3,\quad \|x\| := \langle x,x\rangle^{1/2}.$$

Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$ tels que $x\neq y$, on appelle *droite affine* passant par les points x et y le sous-ensemble

$$\{tx+(1-t)y \,|\, t\in\mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

Partie I

On appelle *plan affine* dans $\mathbb{R}^3$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$P_{\ell,\alpha} := \{x\in\mathbb{R}^3 \,|\, \ell(x)+\alpha=0\},$$

où $\ell:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est une forme linéaire non-nulle, et α est une constante. Dans le reste de la partie I, on fixe une constante $\alpha\in\mathbb{R}$ et une forme linéaire non-nulle $\ell:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ et on désigne par K le noyau de ℓ, défini par $\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,\ell(x)=0\}$. On désigne par $\pi_K:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale dans K. Rappelons que, pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, $\pi_K(x)$ est l'unique élément de K tel que $x-\pi_K(x)$ soit orthogonal au sous-espace vectoriel K.

1. Montrer que, pour tout couple $(x,y)\in P_{\ell,\alpha}\times K$, on a $x+y\in P_{\ell,\alpha}$.
Réponse. $\ell(x+y)+\alpha=\ell(x)+\ell(y)+\alpha=\ell(x)+\alpha=0$.

2. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in P_{\ell,\alpha}^2$, on a $x - y \in K$.
Réponse. On a $\ell(x) + \alpha = 0 = \ell(y) + \alpha$. Donc $\ell(x - y) = \alpha - \alpha = 0$.

3. En dédire que, pour tout $(x, y) \in P_{\ell,\alpha}^2$,

$$x - \pi_K(x) = y - \pi_K(y).$$

Réponse. Par la question précédente, on a $x - y \in K$ et donc $x - y = \pi_K(x - y) = \pi_K(x) - \pi_K(y)$. Donc $x - \pi_K(x) = y - \pi_K(y)$.

4. Montrer qu'il existe un unique élément $O_{\ell,\alpha} \in P_{\ell,\alpha}$ qui est orthogonal à K.
Réponse. Soit $O_{\ell,\alpha} := x - \pi_K(x)$ pour $x \in P_{\ell,\alpha}$ quelconque (d'après la question précédente, cette définition ne dépend pas du choix de x). Par définition $O_{\ell,\alpha}$ est orthogonal à K. D'après la question **1.**, $O_{\ell,\alpha} \in P_{\ell,\alpha}$. Si x est un autre élément dans $P_{\ell,\alpha}$ qui est orthogonal à K, alors $O_{\ell,\alpha} = x - \pi_K(x) = x$.

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique point $\pi_{\ell,\alpha}(x)$ de $P_{\ell,\alpha}$ tel que $x - \pi_{\ell,\alpha}(x)$ soit orthogonal à K. Explicite $\pi_{\ell,\alpha}(x)$ en fonction de $\pi_K(x)$ et $O_{\ell,\alpha}$.
Réponse. Soit $\pi_{\ell,\alpha}(x) = \pi_K(x) + O_{\ell,\alpha}$, qui appartient à $P_{\ell,\alpha}$ d'après la question **1.**. On a $x - \pi_{\ell,\alpha}(x) = x - \pi_K(x) - O_{\ell,\alpha} \perp K$. Si z est un autre point de $P_{\ell,\alpha}$ tel que $x - z \perp K$, alors $z - O_{\ell,\alpha}$ est un élément de K (d'après la question **2.**) tel que $x - (z - O_{\ell,\alpha}) \perp K$, d'où $z - O_{\ell,\alpha} = \pi_K(x)$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $\pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) = \pi_{\ell,\alpha}(x)$.
Réponse : D'abord on a $\pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) \in P_{\ell,\alpha}$. En outre

$$x - \pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) = x - \pi_{\ell,\alpha}(x) + \pi_{\ell,\alpha}(x) - \pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) \perp K.$$

Par l'unicité démontrée dans la question précédente, on a $\pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) = \pi_{\ell,\alpha}(x)$.

7. On désigne par $s_{\ell,\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application qui envoie tout $x \in \mathbb{R}^3$ sur $2\pi_{\ell,\alpha}(x) - x$, appelée *symétrie orthogonale* par rapport au plan affine $P_{\ell,\alpha}$. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a

$$\|s_{\ell,\alpha}(x) - s_{\ell,\alpha}(y)\| = \|x - y\|.$$

Réponse. On a $s_{\ell,\alpha}(x) = s_K(x) - O_{\ell,\alpha}$. Donc

$$\|s_{\ell,\alpha}(x) - s_{\ell,\alpha}(y)\| = \|s_K(x) - s_K(y)\| = \|s_K(x - y)\| = \|x - y\|.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$s_{\ell,\alpha}(s_{\ell,\alpha}(x)) = x.$$

(*Attention : l'application $\pi_{\ell,\alpha}$ n'est pas nécessairement linéaire.*)
Réponse : On a $s_{\ell,\alpha} = s_K + 2O_{\ell,\alpha}$. Donc

$$s_{\ell,\alpha}(s_{\ell,\alpha}(x)) = s_K(s_K(x) + 2O_{\ell,\alpha}) + 2O_{\ell,\alpha} = x + s_K(2O_{\ell,\alpha}) + 2O_{\ell,\alpha}.$$

Comme $s_K(2O_{\ell,\alpha}) = 2\pi_K(2O_{\ell,\alpha}) - 2O_{\ell,\alpha} = -2O_{\ell,\alpha}$, on obtient le résultat.

9. Soit v un élément non-nul de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\ell(x) = \langle v, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$s_{\ell,\alpha} = x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v + 2O_{\ell,\alpha}.$$

Réponse. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\pi_K(x) = x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v.$$

En effet, on a

$$\ell\Big(x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v\Big) = \ell(x) - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}\ell(v) = \langle v, x\rangle - \langle v, x\rangle = 0.$$

Donc

$$x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v \in K.$$

En outre,

$$x - \Big(x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v\Big) = \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v \perp K.$$

On obtient ainsi

$$\pi_K(x) = x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v,$$

qui implique que le résultat énoncé dans la question.

Partie II

Dans cette partie, on fixe une constante α telle que $\frac{1}{2}\sqrt{3} < \alpha < 1$. Soit

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3 \mid x_1 > \alpha\}.$$

On admet que U est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \|x\|^2 - 1.$$

Soit $S := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des points de zéro de f.

10. Montrer que la fonction f est différentiable sur U et que la forme linéaire $Df(x)$ est non-nulle pour tout $x \in S$.

Réponse. Pour tout $h \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|h\|$ soit assez petit, on a

$$f(x+h) = \|x+h\|^2 - 1 = \|x\|^2 - 1 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 = f(x) + 2\langle x, h\rangle + o(\|x\|).$$

Donc $Df(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$. Si $x \in S$, alors $x \neq 0$, donc la forme linéaire $2\langle x, \cdot\rangle$ est non-nulle.

Pour tout point $x \in S$, on désigne par T_xS l'espace tangent de S en x, défini par

$$T_xS := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid Df(x)(z - x) = 0\}.$$

On suppose qu'un miroir réfléchissant est placé à la position de S, qui suit les lois de la réflexion de Descartes (l'angle réfléchi est égal à l'angle d'incidence). En termes mathématique, si un rayon lumineux provenant d'un point $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ rencontre la surface S au point d'incidence x, alors le rayon réfléchi est contenu dans la droite affine $D_{x,y}$ passant par x et la symétrique orthogonale de y par rapport au plan tangent T_xS.

Soit y un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus S$. On dit qu'un point $\widetilde{y}$ est une *image optique* de y par rapport à S si, pour tout $x \in S$, le point $\widetilde{y}$ appartient à la droite affine $D_{x,y}$ passant par x et la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS.

11. Soient $x \in S$ et $y \in \mathbb{R}^3$. On désigne par $\mathrm{Sym}_{x,S}(y)$ la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS. Montrer que

$$\mathrm{Sym}_{x,S}(y) = y + 2(1 - \langle x, y\rangle)x.$$

Réponse. Par définition on a $\|x\|^2 = 1$. Soient $\ell(\cdot) = \langle 2x, \cdot\rangle$ et $\alpha = -2\langle x, x\rangle = -2$. Alors on a $T_xS = P_{\ell,\alpha}$. En outre, comme x est orthogonal à $\mathrm{Ker}(\ell)$ et $x \in T_xS$, d'après la question **4.**, on a $O_{\ell,\alpha} = x$.

D'après la question 9., la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS est

$$\mathrm{Sym}_{x,S}(y) = y - 2\frac{\langle 2x, y\rangle}{\|2x\|^2}2x + 2x = y - 2\langle x, y\rangle x + 2x$$

12. Montrer que le point à l'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ admet une image optique. Déterminer l'image optique de $\mathbf{0}$.

Réponse. D'après la question précédente, pour tout $x \in S$, on a $\mathrm{Sym}_{x,S}(\mathbf{0}) = 2x$. La droite affine passant par $2x$ et x est $\{kx \mid k \in \mathbb{R}\}$. Donc $\mathbf{0}$ est l'image optique de $\mathbf{0}$.

13. Soient $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ tel que $y \neq \mathbf{0}$. Montrer que y n'admet pas d'image optique. (*Indication : on peut raisonner par absurde en montrant que, si $\widetilde{y}$ est une image optique de y, alors, pour tout $x \in S$, le vecteur $\widetilde{y}$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par x et y*)

Réponse. On suppose que $\widetilde{y}$ est une image optique de y. Pour tout $x \in S$, il existe alors $t(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widetilde{y} = t(x)y + (1 + t(x) - 2\langle x, y\rangle t(x))x.$$

On en déduit que, pour tout $x \in S$, $\widetilde{y}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par x et y. Comme $x \in S$ est arbitraire, $\widetilde{y}$ est proportionnel à y. Cela montre que $y = 0$.

Soient $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ et $\varepsilon > 0$. On dit que $y' \in \mathbb{R}^3$ est une *ε-image optique* de y si, pour tout $x \in S$, l'intersection de $D_{x,y}$ avec

$$B(\widehat{y}; \varepsilon) := \{z \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|z - \widehat{y}\| < \varepsilon\}$$

est non-vide.

On désigne par V le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V = \left\{\theta x \,\middle|\, x \in S,\ 1 > \theta > \frac{1}{4\alpha^2 - 2}\right\}.$$

14. Montrer que, pour tout couple $(x, x') \in S^2$, on a $\langle x, x'\rangle > 2\alpha^2 - 1$.

Réponse. On suppose que x et x' sont de la forme (x_1, x_2, x_3) et (x_1', x_2', x_3') respectivement. Par définition on a $x_1 > \alpha$, $x_1' > \alpha$ et $\|x\| = \|x'\| = 1$. Donc $x_2^2 + x_3^2 < 1 - \alpha^2$ et $(x_2')^2 + (x_3')^2 < 1 - \alpha^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|x_2 x_2' + x_3 x_3'| \leqslant \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)((x_2')^2 + (x_3')^2)} \leqslant 1 - \alpha^2$$

et donc $x_2 x_2' + x_3 x_3' \geqslant \alpha^2 - 1$. D'où

$$\langle x, x'\rangle \geqslant \alpha^2 + \alpha^2 - 1 = 2\alpha^2 - 1.$$

15. En déduire que, pour tout $y \in V$ et tout $x \in S$, on a

$$(2\alpha^2 - 1)\|y\| \leqslant \langle y, x\rangle \leqslant \|y\|.$$

Réponse. Soit $x' = \|y\|^{-1}y$. On a $x' \in S$. D'après la question précédente, on a $\langle x, y\rangle = \|y\|\langle x, x'\rangle \geqslant (2\alpha^2 - 1)\|y\|$.

16. Soient y un élément de V et $x \in S$. Montrer que la droite affine $D_{x,y}$ (passant par x et la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS)

croise la droite $\{\lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Déterminer le point d'intersection.
Réponse. La symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS est

$$y - 2(1 - \langle x, y\rangle)x.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} D_{x,y} &= \{t(y + (2 - 2\langle x, y\rangle)x) + (1-t)x \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ty + (1 + t - 2t\langle x, y\rangle)x \mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

On a

$$2\langle y, x\rangle - 1 \geqslant 2(2\alpha^2 - 1)\|y\| - 1 > 0.$$

Donc $D_{x,y}$ croise $\mathbb{R}y$ au point

$$\frac{1}{2\langle x, y\rangle - 1} y.$$

17. Soit y un élément de V. Montrer que

$$\varphi(y) := \frac{1}{2\|y\| - 1} y$$

est une $\varepsilon(y, \alpha)$-image optique de y, où

$$\varepsilon(y, \alpha) = \frac{4 - 4\alpha^2}{(2 - \|y\|^{-1})(4\alpha^2 - 2 - \|y\|^{-1})}.$$

Réponse. On a

$$\frac{1}{2\|y\| - 1} \leqslant \frac{1}{2\langle x, y\rangle - 1} \leqslant \frac{1}{(4\alpha^2 - 2)\|y\| - 1}.$$

Donc

$$\left\| \frac{1}{2\langle x, y\rangle - 1} y - \widehat{y} \right\| \leqslant \left| \frac{1}{2 - \|y\|^{-1}} - \frac{1}{(4\alpha^2 - 2) - \|y\|^{-1}} \right| = \varepsilon(y, \alpha).$$

18. Soient y et y' deux éléments de V tels que $\|y\| = \|y'\|$. Montrer que

$$\|\varphi(y) - \varphi(y')\| > \|y - y'\|.$$

Comparer à la question **7**.
Réponse : Comme $y \in V$ on a $\|y\| < 1$ et donc

$$\frac{1}{2\|y\| - 1} = \frac{1}{2\|y'\| - 1} > 1.$$

Cela montre que

$$\|\varphi(y) - \varphi(y')\| = \frac{1}{2\|y\| - 1}\|y - y'\| > \|y - y'\|.$$

19. Décrire une application de miroir sphérique qui peut être expliquée par la question précédente.
Réponse : miroir de maquillage.

20. Montrer que, pour tout $y \in V$,

$$\varepsilon(y, \alpha) > \frac{4 - 4\alpha^2}{4\alpha^2 - 3}.$$

Commenter cette inégalité dans le cadre de l'application de miroir sphérique introduite dans votre réponse à la question **19**.
Réponse : Comme $y \in V$, on a $\|y\| < 1$ et donc $\|y\|^{-1} > 1$. Par conséquent,

$$\varepsilon(y, \alpha) = \frac{4 - 4\alpha^2}{(2 - \|y\|^{-1})(4\alpha^2 - 2 - \|y\|^{-1})} > \frac{4 - 4\alpha^2}{4\alpha^2 - 3}.$$

L'image d'un objet au bord d'un miroir de maquillage devient plus flou.

Fin de l'épreuve