Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2017-2018

Feuille d'exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$f(1,1,1) = 0, \quad f(2,0,1) = 1, \quad f(1,2,3) = 4.$$

Déterminer une base du noyau de f.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui est engendré par un nombre fini d'éléments. On désigne par $E^\vee$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E.

(1) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $e_i^\vee : E \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$ (où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$) sur λ_i. Montrer que l'application $e_i^\vee$ est bien définie et est une forme linéaire sur E.

(2) Montrer que $(e_i^\vee)_{i=1}^n$ forme une base de $E^\vee$ (appelée désormais la *base duale* de la base $(e_i)_{i=1}^n$).

(3) Soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ une famille finie d'éléments de $E^\vee$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

(a) Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})$ si et seulement si $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

(b) Montrer que la famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ est génératrice ssi $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \{0\}$.

(c) Montrer que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ est une famille libre si et seulement si

$$\dim\Big(\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\varphi_i)\Big) = \dim(E) - k.$$

(4) Montrer que, pour toute base $(\varphi_i)_{i=1}^n$ de $E^\vee$, il existe une unique base de E dont la base duale est $(\varphi_i)_{i=1}^n$.

(5) On suppose que la dimension de E sur $\mathbb{R}$ est 3. Montrer que

$$\varphi_1 = 2e_1^\vee + e_2^\vee + e_3^\vee, \quad \varphi_2 = -e_1^\vee + 2e_3^\vee, \quad \varphi_3 = e_1^\vee + 3e_2^\vee$$

forment une base de $E^\vee$. Déterminer la base de E dont la base duale est $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. On désigne par $\mathbb{R}[X]_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Soit $\{a_0, \ldots, a_n\}$ des nombres réels distincts. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, soit $\varphi_i : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $F \in \mathbb{R}[X]_n$ sur $F(a_i)$.

(a) Montrer que chaque φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]_n$.

(b) Montrer que $(\varphi_i)_{i=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n^\vee$.

(c) Déterminer la base de $\mathbb{R}[X]_n$ dont la base duale est $(\varphi_i)_{i=0}^n$.

3. Soient a, b, c des paramètres réels et $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\Phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3).$$

(a) Montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Montrer que Φ n'est jamais un produit scalaire quel que soit le choix des paramètres réels a, b et c.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Montrer que l'application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$b((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

est un produit scalaire.

(b) En déduire que l'inégalité

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

est vraie pour tout entier n, $n \geqslant 1$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour quelles valeurs des x_i a-t-on l'égalité ?

(c) Soit $C^0([-1, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles. Montrer que $\langle\, , \,\rangle : C^0([-1, 1]) \times C^0([-1, 1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

(d) En déduire que, pour toute fonction continue sur $[-1, 1]$, on a

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\Big| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

5. Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $u_1 = (1, -2, -2)$, $u_2 = (-1, 0, -1)$ et $u_3 = (5, -3, 7)$.

6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + y - z - t &= 0 \end{cases}$$

(a) Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.

(b) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

7. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1,0,3)$ et $v_2 = (0,2,5)$.

(a) Construire une base orthonormée de F. Quel est l'orthogonal $F^\perp$ de F ?

(b) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Mêmes questions lorsque F est défini par l'équation $2x + 3y - 4z = 0$.

8. On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0), \quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

(a) Donner les normes de u et v et leur produit scalaire.

(b) Trouver la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal, noté p, sur le plan vectoriel P engendré par u et v.

(c) Trouver un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et en déduire une équation du plan P.

(d) Soit $u' = (1,0,1)$. Calculer l'angle entre u' et $p(u')$.

9. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_2$ des polynômes de degré $\leqslant 2$ du produit scalaire ϕ défini sur $\mathbb{R}[X]_2 \times \mathbb{R}[X]_2$ par

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

(a) Déterminer la distance du polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

(b) Transformer la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}[X]_2$ en une base orthonormée (P_1, P_2, P_3) par le procédé de Gram-Schmidt. En déduire l'orthogonal du sous-espace F engendré par $1, X$.

(c) Calculer la projection orthogonale du polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ sur le sous-espace vectoriel F.

(d) Calculer

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left(\sin(x) - a - bx - cx^2\right)^2 dx.$$

10. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire suivante

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad b((t,x,y,z),(t',x',y',z')) = c^2 tt' - xx' - yy' - zz',$$

où c est une constante strictement positive, représentant la vitesse de la lumière. Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à b, définie comme

$$q(t,x,y,z) = b((t,x,y,z),(t,x,y,z)) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Rappelons que, si v et v' sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, alors la relation suivante est vérifiée

$$q(v+v') = q(v) + q(v') + 2b(v,v').$$

On désigne par Σ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}$ tels que $q(v) > 0$, appelé *cône de lumière*. Soit Σ_+ l'ensemble des vecteurs $v = (t,x,y,z)$ dans Σ tels que $t > 0$, appelé *cône de lumière futur*.

(1) La forme bilinéaire b est-elle symétrique ?

(2) La forme bilinéaire b est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$?

(3) Montrer que, si $v \in \Sigma_+$, alors $\lambda v \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda > 0$.

(4) Montrer que, si v et v' sont deux vecteurs dans Σ_+, alors $b(v,v') > 0$. (*Indication : écrire v et v' comme (t,u) et (t',u') respectivement, où u et u' appartiennent à $\mathbb{R}^3$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^3$*)

(5) En déduire que, pour tout couple $(v,v') \in \Sigma_+^2$, on a $v + v' \in \Sigma_+$.

(6) Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda v + w \in \Sigma_+$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

(7) Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe au moins un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q(\lambda v + w) \leqslant 0$. (*Indication : on peut considérer la première coordonnée du vecteur $\lambda v + w$.*)

(8) Soient v un vecteur dans Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$. Montrer que

$$b(v,w)^2 \geqslant q(v)q(w).$$

(*Indication : on peut utiliser le fait que la fonction quadratique $\lambda \mapsto q(\lambda v + w)$ prend au moins une valeur non-positive.*)

(9) Soient v un élément de Σ_+ et $w \in \mathbb{R}^4$ tels que $b(v,w) = 0$. Montrer que $q(w) \leqslant 0$.

(10) Soient v_1 et v_2 deux vecteurs dans Σ_+. Montrer que

$$q(v_1+v_2)^{1/2} \geqslant q(v_1)^{1/2} + q(v_2)^{1/2}.$$