Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies
2017-2018

Feuille d'exercice 2

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère les applications $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $I : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $v_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ et $v_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définies par, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$T(P)(X) = XP(X), \quad D(P)(X) = P'(X), \quad I(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$v_0(P) = P(0), \quad v_1(P) = P(1).$$

1. Montrer que les applications T, D, I, v_0 et v_1 sont linéaires.

2. On désigne par $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall\,(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

(1) Montrer que $\langle\, , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Dans le reste de l'exercice, on munira $R[X]$ de ce produit scalaire pour former un espace préhilbertien.

(2) Montrer que la forme linéaire I est bornée.

(3) Montrer que la forme linéaire $v_1 - v_0$ n'est pas bornée.

(4) Montrer que $I \circ D = v_1 - v_0$.

(5) En déduire que l'endomorphisme D n'est pas borné et qu'il n'admet pas d'adjoint.

(6) Montrer que l'endomorphisme T de $\mathbb{R}[X]$ est auto-adjoint.

(7) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ qui est définie par

$$\forall,\ P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = \int_0^1 \mathrm{e}^t P(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire bornée.

(8) Montrer qu'il n'y a aucun polynôme F dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $F(t) = \mathrm{e}^t$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(9) En déduire que $(\mathbb{R}[X], \langle\, , \rangle)$ n'est pas un espace hilbertien.

3. On désigne par $q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall\,P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X], \quad q(P) := a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

(1) Montrer que q est une forme quadratique associée à un produit scalaire b sur $\mathbb{R}[X]$. Dans le reste de l'exercice, on munira $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on désigne par $\|\cdot\|_b$ la norme induite par b.

(2) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\|P\|_b = \|T(P)\|_b$.

(3) Montrer que l'endomorphisme T de $\mathbb{R}[X]$ admet un adjoint et déterminer son adjoint T^*.

(4) Montrer que $T^* \circ T$ est l'endomorphisme d'identité de $\mathbb{R}[X]$.

(5) L'endomorphisme T est-il orthogonal, est-il auto-adjoint ?

(6) Montrer que la forme linéaire v_0 est bornée tandis que v_1 n'est pas bornée.

(7) En déduire que l'endomorphisme D n'est pas borné.

(8) Montrer que l'endomorphisme D admet un adjoint et déterminer son adjoint.

(9) Montrer que la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$$

est convergente.

(10) En déduire que la forme linéaire $I : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est bornée.

(11) Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $I(Q) = b(P, Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$.

(12) En déduire que $(\mathbb{R}[X], b)$ n'est pas un espace hilbertien.

4. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ défini comme

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

(1) Vérifier que $\{(1,0), (0,1)\}$ forme une base orthonormée.

(2) Soient $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorphisme orthogonal et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de T par rapport à la base $\{(1,0), (0,1)\}$. On suppose que T est de déterminant 1.

(a) Montrer que $ad - bc = 1$.

(b) Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que $a = d$ et $b = -c$.

(d) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(e) Écrire T en composée de deux réflexions.

5. Etudier les endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ représentés dans une base orthonormale par les matrices :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

S'il s'agit de rotations, en déterminer l'axe et l'angle.

6. On considère l'endomorphisme $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sur

$$(-2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

(1) Calculer l'adjoint de l'endomorphisme F.

(2) L'endomorphisme F est-il auto-adjoint ?

(3) Montrer qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'endomorphisme αF soit orthogonal. Déterminer ce nombre.

(4) Montrer qu'il existe un et un seul sous-espace vectoriel L de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ tel que la restriction de αF à L est l'application d'identité. Déterminer ce sous-espace vectoriel.

(5) En utilisant la droite L, décrire la nature de l'endomorphisme F.

7. Diagonaliser dans une base orthonormée les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier sans aucun calcul l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que $A = PD\,{}^tP$.

(b) Calculer un tel couple de matrices (D, P).

9. Soit V un espace vectoriel de type fini sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

(1) Soit T un endomorphisme de V. Montrer que l'endomorphisme $T^* \circ T$ est auto-adjoint et que ses valeurs propres sont positives.

(2) Soit $\mathrm{End}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V. Montrer que l'application $q : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}$ qui envoie $T \in \mathrm{End}(V)$ sur $\mathrm{Tr}(T^* \circ T)$ est une forme quadratique, dont la forme polaire est un produit scalaire.

(3) Soit f un endomorphisme de V. On suppose que $f^* \circ f = f \circ f^*$. Soit F un sous-espace vectoriel de V tel que $f(F) \subset F$. Le but de cette question est de montrer que $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

(a) Soient $\pi_{F^\perp} : V \to V$ la projection orthogonale dans $F^\perp$ et $\pi_F : V \to V$ la projection orthogonale dans F. Montrer que $\pi_{F^\perp} \circ f \circ \pi_F = 0$.

(b) En déduire

$$\pi_{F^\perp} \circ f \circ \pi_{F^\perp} = \pi_{F^\perp} \circ f.$$

(c) Soit $T = \pi_F \circ f \circ \pi_{F^\perp}$. Montrer que $\mathrm{Tr}(T^* \circ T) = 0$.

(d) En déduire $T = 0$.

(e) Montrer que $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

(4) Soit $f : V \to V$ un endomorphisme orthogonal. Montrer que V s'écrit comme une somme directe orthogonale $V = E_1 \oplus E_{-1} \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, où

(a) $E_1 = \{x \in V \mid f(x) = x\}$,

(b) $E_{-1} = \{x \in V \mid f(-x) = -x\}$,

(c) chaque V_i est de dimension 2, stable par f, et tel que la restriction de f à V_i est une rotation.