Université Paris Diderot
L2MP4 Algèbre et analyse approfondies

Partiel du 20 mars 2018
10h45-12h45, Halles aux faines, Amphi 5C

Tous les documents sur papier sont autorisés, tandis que les appareils électroniques sont interdits. La difficulté des questions, vue comme une fonction du numéro de question, **n'est pas** *nécessairement croissante. Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,20\}^2$ tel que $i < j$, l'énoncé de la question numéro i, même non justifié, peut être utilisé dans la réponse à la question numéro j. Lire attentivement l'ensemble du sujet avant de répondre aux questions.*

Le but du partiel est d'étudier des propriétés de miroirs réfléchissants par la géométrie de $\mathbb{R}^3$ et le calcul différentiel. Dans toute l'épreuve on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $\langle\, ,\, \rangle$, défini par

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \langle x, y\rangle := x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad \|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$ tels que $x \neq y$, on appelle *droite affine* passant par les points x et y le sous-ensemble

$$y + \mathbb{R}(x-y) = \{y + t(x-y) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{tx + (1-t)y \mid t \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

Partie I

On appelle *plan affine* dans $\mathbb{R}^3$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$P_{\ell,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ell(x) + \alpha = 0\},$$

où $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non-nulle, et α est une constante. Dans le reste de la partie I, on fixe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ et une forme linéaire non-nulle $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et on désigne par

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ell(x) = 0\}$$

le noyau de ℓ. On désigne par $\pi_K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale dans K. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\pi_K(x)$ est l'unique élément de K tel que $x - \pi_K(x)$ soit orthogonal à K.

 Tourner s'il vous plaît

1. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in P_{\ell,\alpha} \times K$, on a $x + y \in P_{\ell,\alpha}$.

2. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in P_{\ell,\alpha} \times P_{\ell,\alpha}$, on a $x - y \in K$.

3. En dédire que, pour tout $(x, y) \in P_{\ell,\alpha}^2$,

$$x - \pi_K(x) = y - \pi_K(y).$$

(*Indication : on peut montrer que* $z = x - (y - \pi_K(y))$ *est un élément de* K *tel que* $x - z$ *soit orthogonal à* K*.*)

4. Montrer qu'il existe un unique élément $O_{\ell,\alpha} \in P_{\ell,\alpha}$ qui est orthogonal à K. (*Indication : utiliser la question précédente.*)

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\pi_{\ell,\alpha}(x) := \pi_K(x) + O_{\ell,\alpha}$ est l'unique point de $P_{\ell,\alpha}$ tel que $x - \pi_{\ell,\alpha}(x)$ soit orthogonal à K.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $\pi_{\ell,\alpha}(\pi_{\ell,\alpha}(x)) = \pi_{\ell,\alpha}(x)$.

7. On désigne par $s_{\ell,\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application qui envoie tout $x \in \mathbb{R}^3$ sur $2\pi_{\ell,\alpha}(x) - x$, appelée *symétrie orthogonale* par rapport au plan affine $P_{\ell,\alpha}$. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a

$$\|s_{\ell,\alpha}(x) - s_{\ell,\alpha}(y)\| = \|x - y\|.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$s_{\ell,\alpha}(s_{\ell,\alpha}(x)) = x.$$

(*Attention : l'application* $\pi_{\ell,\alpha}$ *n'est pas nécessairement linéaire.*)

9. Soit v un élément non-nul de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\ell(x) = \langle v, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$s_{\ell,\alpha}(x) = x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v + 2O_{\ell,\alpha}.$$

Indication : on peut commencer par montrer que

$$\pi_K(x) = x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v.$$

Partie II

Dans cette partie, on fixe une constante réelle α telle que $\frac{1}{2}\sqrt{3} < \alpha < 1$. Soit

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3 \,|\, x_1 > \alpha\}.$$

On admet que U est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \|x\|^2 - 1.$$

Soit $S := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des points de zéro de f.

10. Montrer que la fonction f est différentiable sur U et que la forme linéaire $Df(x)$ est non-nulle pour tout $x \in S$.

Pour tout point $x \in S$, on désigne par T_xS l'espace tangent de S en x, défini par

$$T_xS := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid Df(x)(z - x) = 0\}.$$

On suppose qu'un miroir réfléchissant est placé à la position de S, qui suit les lois de la réflexion de Descartes (l'angle réfléchi est égal à l'angle d'incidence). En termes mathématiques, si un rayon lumineux provenant d'un point $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ rencontre la surface S au point d'incidence x, alors le rayon réfléchi est contenu dans la droite affine $D_{x,y}$ passant par x et la symétrique orthogonale de y par rapport au plan tangent T_xS.

Soit y un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus S$. On dit qu'un point $\widetilde{y}$ est une *image optique* de y par rapport à S si, pour tout $x \in S$, le point $\widetilde{y}$ appartient à la droite affine $D_{x,y}$ passant par x et la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS.

11. Soient $x \in S$ et $y \in \mathbb{R}^3$. On désigne par $\mathrm{Sym}_{x,S}(y)$ la symétrie orthogonale de y par rapport à T_xS. Montrer que

$$\mathrm{Sym}_{x,S}(y) = y + 2(1 - \langle x, y \rangle)x.$$

(*Indication : utiliser la question* **9.**)

12. Montrer que le point à l'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ admet une image optique. Déterminer l'image optique de $\mathbf{0}$.

13. Soit $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ tel que $y \neq \mathbf{0}$. Montrer que y n'admet pas d'image optique. (*Indication : on peut raisonner par absurde en montrant que, si $\widetilde{y}$ est une image optique de y, alors, pour tout $x \in S$, le vecteur $\widetilde{y}$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par x et y.*)

Soient $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ et $\varepsilon > 0$. On dit que $\widehat{y} \in \mathbb{R}^3$ est une *ε-image optique* de y si, pour tout $x \in S$, l'intersection de $D_{x,y}$ avec

$$B(\widehat{y}; \varepsilon) := \{z \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|z - \widehat{y}\| < \varepsilon\}$$

est non-vide.

On désigne par V le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V = \left\{ \theta x \,\middle|\, x \in S,\ 1 > \theta > \frac{1}{4\alpha^2 - 2} \right\}.$$

14. Montrer que, pour tout couple $(x, x') \in S^2$, on a $\langle x, x' \rangle > 2\alpha^2 - 1$. (*Indication : on écrite x et x' comme $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ et applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $x_2x'_2 + x_3x'_3$*)

15. En déduire que, pour tout $y \in V$ et tout $x \in S$, on a

$$(2\alpha^2 - 1)\|y\| \leqslant \langle y, x \rangle \leqslant \|y\|.$$

(*Indication : on applique la question précédente à x et $x' = \|y\|^{-1}y$.*)

16. Soient y un élément de V et $x \in S$. Montrer que la droite affine $D_{x,y}$ passant par x et $\mathrm{Sym}_{x,S}(y)$ croise la droite $\{\lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Déterminer le point d'intersection.

17. Soit y un élément de V. Montrer que

$$\varphi(y) := \frac{1}{2\|y\| - 1} y$$

est une $\varepsilon(y, \alpha)$-image optique de y, où

$$\varepsilon(y, \alpha) = \frac{4 - 4\alpha^2}{(2 - \|y\|^{-1})(4\alpha^2 - 2 - \|y\|^{-1})}.$$

18. Soient y et y' deux éléments de V tels que $\|y\| = \|y'\|$. Montrer que

$$\|\varphi(y) - \varphi(y')\| > \|y - y'\|.$$

Comparer à la question **7**.

19. Décrire une application de miroir sphérique qui peut être expliquée par la question précédente.

20. Montrer que, pour tout $y \in V$,

$$\varepsilon(y, \alpha) > \frac{4 - 4\alpha^2}{4\alpha^2 - 3}.$$

Commenter cette inégalité dans le cadre de l'application de miroir sphérique introduite dans votre réponse à la question **19**.

Fin de l'épreuve

Devoir à la maison noté

Les étudiants sont invités à continuer l'étude du sujet du partiel sous forme de devoir à la maison noté en accomplissant une ou plusieurs tâches comme ci-dessous (dont la difficulté est croissante par rapport au numéro de tâche du point de vue du professeur chargé du cours).

1. (5 points) Re-répondre aux questions du partiel.
2. (2 points) Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^3$ et D la droite affine passant par x et y. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\inf_{w \in D} \|z - w\|^2 = \frac{\|z - x\|^2 \cdot \|z - y\|^2 - \langle z - x, z - y \rangle^2}{\|x - y\|^2}$$
Indication : on peut commencer par montrer l'égalité dans le cas particulier où $z \in D$, puis montrer que tout élément $z \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique sous forme de $z = z_0 + w$, où $z_0 \in D$ et w est orthogonal à $x - y$.
3. (3 points) Avec les notations de la question **17.** du partiel, déterminer l'infimum des $\varepsilon > 0$ tels que $\varphi(y)$ soit une ε-image optique de y.
4. (5 points) Dans le cadre défini dans la partie II du partiel, étudier les ε-images optiques des points dans l'ensemble $W = \{\theta x \mid x \in S,\ \theta > 1\}$ et établir des liens avec des applications pratiques comme par exemple le rétroviseur de voiture.
5. (10 points) En utilisant la méthode développée dans le partiel, étudier un miroir optique surface qui n'est ni plan ni sphérique.

La note du devoir à la maison ne dépasse pas 10 points. Par exemple, si vous réussissez parfaitement la première et la dernière tâches, vous obtenez 10 comme note du devoir. Votre note finale du partiel sera le minimum entre 20 et la somme des notes de l'épreuve du partiel dans la salle (notée sur 20) et du devoir à la maison.

Ce devoir à la maison doit être impérativement rendu le mardi 27 mars 2018 à 10h45 avant le cours au professeur chargé du cours. Cette date est repoussée au mardi 3 avril 2018 à 10h45 pour les étudiant(e)s qui ont déclaré leurs droits au relais handicap Diderot. Au cas d'absence au cours *justifiés*, le devoir doit être envoyé par la voie postale avant la même date et la même heure limites à l'adresse suivante (le cachet postal faisant foi). Toute soumission en retard ne sera pas acceptée.

Huayi Chen, Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, Boîte Courrier 7012, 75205 Paris Cedex 13.

Je, soussigné(e) , accuse être informé(e) des tâches du devoir à la maison noté, ses modalités de notation et de soumission.

Paris le 20 mars 2018, Signature