MP4 : séance 1

2017年11月10日 19:21

Séance 1 Rappels

§1 Espaces vectoriels

Notation : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

<u>Définition</u> On appelle espace vectoriel sur K tout ensemble non-vide V muni d'une application d'addition $V \times V \longrightarrow V$, $(x, y) \mapsto x+y$, et d'une application de multiplication par un scalaire $K \times V \longrightarrow V$, $(a, x) \mapsto ax$, qui vérifie les axiomes suivantes :

- Commutativité et associabilité de + :

  $\forall (x, y, z) \in V^3$, $x+y = y+x$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
- vecteur nul : $\exists\, 0 \in V$ tel que, $\forall x \in V$, $0+x = x+0 = x$
- vecteur opposé : $\forall x \in V$, $\exists -x \in V$, $x+(-x) = 0$
- associablité de multiplication :

  $\forall (a, b) \in K^2$, $\forall x \in V$, $a(bx) = (ab)x$
- multiplication par l'unité : $\forall x \in V$, $1x = x$
- distributivité entre la multiplication et l'addition :

  $\forall (a, b) \in K^2$, $\forall x \in V$, $(a+b)x = ax + bx$

  $\forall a \in K$, $\forall (x, y) \in V^2$, $a(x+y) = ax + ay$.

<u>Exemples</u> ① K^n, où $n \in \mathbb{N}$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n) \qquad a \in K$$

② Soit Ω un ensemble. L'ensemble $\mathrm{Fon}(\Omega, K)$ des fonctions sur Ω à valeurs dans K forme un espace vectoriel sur K.

$\forall (f, g) \in \mathrm{Fon}(\Omega, K)^2$ $f+g$ envoie $\omega \in \Omega$ sur $f(\omega)+g(\omega)$

$\forall f \in \mathrm{Fon}(\Omega, K)$, $\forall a \in K$, af envoie $\omega \in \Omega$ sur $af(\omega)$.

<u>Def</u> Soit V un espace vectoriel sur K. On appelle sous-espace vectoriel de V tout sous-ensemble non-vide W qui est stable par l'addition et la multiplication par scalaire : $\forall (x, y) \in W^2$, $x+y \in W$, $\forall (a, x) \in K \times W$, $ax \in W$.

MP4 : séance 1

2017年11月10日 19:21

<u>Def</u> Soient V_1 et V_2 deux espace vectoriel sur K.

On dit qu'une application $f : V_1 \longrightarrow V_2$ est K-linéaire si les condition suivantes sont satisfaites:

- $\forall\ (x, y) \in V_1$, $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall\ (a, x) \in K \times V_1$, $\quad f(ax) = a f(x)$.

On désigne par $\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ l'ensemble des applications K-linéaire de V_1 dans V_2.

C'est un espace vectoriel sur K:

$\forall\ (f, g) \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)^2$, $\quad f+g$ envoie $x \in V_1$ sur $f(x) + g(x)$,

$\forall\ (a, f) \in K \times \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$, $\quad af$ envoie $x \in V_1$ sur $af(x)$.

Soit V un espace vectoriel sur K, les applications K-linéaires de V dans K sont appelées formes linéaires sur V; l'ensemble $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ est noté $V^\vee$.

<u>Remarque</u> Soient V un espace vectoriel sur K, et W un sous-espace vectoriel de V. Alors l'application d'inclusion $W \hookrightarrow V$ est K-linéaire.

§2 Famille génératrice, famille libre, base

<u>Def</u> Soient V un espace vectoriel sur K et A un sous ensemble de V.

- On dit que A est une famille génératrice si, pour tout $x \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ et $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tels que $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

  (dans le cas où $n = 0$, cela veut dire que $x = 0$)
- On dit que A est une famille libre si, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, tous éléments <u>distincts</u> $x_1, \dots, x_n$ dans A et tout $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ entraine $\quad a_1 = \dots = a_n = 0$
- On dit que A est une base de V s'il est une famille génératrice et libre.
- On dit que V est de type fini s'il admet une famille génératrice de cardinale fini.

<u>Théorème 1</u> Soit V un espace vectoriel de type fini sur K.

① Toute famille génératrice contient une base de V

② Toute famille libre est contenue dans une base de V

③ Toutes les bases de V ont le même cardinal (fini), appelé dimension de V sur K, noté $\dim_K(V)$.

§3 Formes bilinéaire

<u>Déf</u> Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle **forme bilinéaire sur V** toute application $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in V$, les deux applications $b(\cdot, y) : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto b(x,y)$ et $b(y,\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto b(y,x)$ sont des formes linéaires sur V.

- On dit que b est **symétrique** si $\forall (x,y) \in V \times V$, $b(y,x) = b(x,y)$
- On dit que b est **positive** si $\forall x \in V$, $b(x,x) \geq 0$
- On dit que b est **définie** si $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $b(x,x) \neq 0$
- On dit que b est un **produit scalaire** si elle est symétrique, définie et positive.

<u>Exemples</u> (1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. L'application $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $b_A(x, y) = {}^t x A y$ est une forme bilinéaire

(2) $V = C^0([0,1]) = \{\text{fonction continue sur } [0,1]\}$

$$\langle , \rangle : C^0([0,1]) \times C^0([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

est une forme bilinéaire sur V. C'est un produit scalaire.

(3) Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, φ et ψ deux formes linéaires sur V. Alors $\varphi \otimes \psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ est une forme bilinéaire sur V.

<u>Déf</u> Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On appelle **forme quadratique** associée à b l'application $q_b : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto b(x,x)$.

<u>Proposition 2</u> $\forall (x,y) \in V \times V$, $b(x,y) + b(y,x) = q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y)$

<u>Preuve</u> $q_b(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x+y, x) + b(x+y, y)$

$= b(x,x) + b(y,x) + b(x,y) + b(y,y) = q_b(x) + q_b(y) + b(x,y) + b(y,x)$ #

<u>Remarque</u> Si b est symétrique, alors $b(x,y) = \frac{1}{2}(q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y))$

<u>Théorème 3</u> (inégalité de Cauchy-Schwarz) (si de plus b est définie, l'égalité est satisfaite $\Leftrightarrow$ x et y sont proportionnels)

Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et b une forme bilinéaire sur V qui est symétrique et positive. Alors $\forall (x,y) \in V \times V$ on a $b(x,y)^2 \leq q_b(x)\, q_b(y)$

<u>Preuve</u> On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $f(t) = q_b(y + tx) = q_b(x) t^2 + 2b(x,y) t + q_b(y)$

C'est un polynôme de degré ≤ 2 qui est positif. Donc $\Delta = 4(b(x,y)^2 - q_b(x) q_b(y)) \leq 0$. #

MP4 : séance 1

2017年11月10日 19:21

§4. Normes

<u>Def</u> Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle semi-norme sur V toute application $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions suivantes

(1) $\forall\, x \in V, \quad \|x\| \geqslant 0$

(2) $\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times V, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(3) $\forall\, (x, y) \in V \times V, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On dit qu'une semi-norme $\|\cdot\|$ sur V est une norme si $\forall\, x \in V \setminus \{0\}$, $\|x\| > 0$.

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur V, $(V, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.

<u>Prop 4</u> Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle\,,\rangle$ un produit scalaire sur V.

Alors $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur V.

<u>Preuve</u> Par définition on a $\|x\| \geqslant 0$ pour tout $x \in V$. En outre, comme $\langle\,,\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, si $x \in V \setminus \{0\}$, on a $\|x\| > 0$.

Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times V$, $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \|x\|$

Pour tout $(x, y) \in V \times V$, $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ et donc $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. On en déduit $\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$, d'où $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. #

<u>Def</u> Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle\,,\rangle$ un produit scalaire sur V.

La norme $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est dite induite par $\langle\,,\rangle$.

Le couple $(V, \langle\,,\rangle)$ est appelé un espace préhilbertien.

§ 5 Orthogonalité

On fixe un espace préhilbertien $(V, \langle\,,\rangle)$. Soit $\|\cdot\|$ la norme induite par $\langle\,,\rangle$.

<u>Déf</u> On dit que deux éléments x, y de V sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, noté $x \perp y$. On dit qu'un sous-ensemble B de V est une famille orthogonale si $\forall (x, y) \in V^2$, $\langle x, y\rangle = 0$. Si de plus $\forall\, x \in V$, $\|x\| = 1$, on dit que B est une famille orthonormée.

Soit $x \in V$ et A un sous-ensemble de V. On dit que x est orthogonal à A si, pour tout $y \in A$, on a $\langle x, y\rangle = 0$.

Si A est un sous-ensemble de V, on désigne par $A^\perp$ l'ensemble des $x \in V$ tels que $x \perp A$. Par définition, si $A \subset B \subset V$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

MP4 : séance 1

2017年11月10日 19:21

Proposition 5 (1) Pour tout $A \subset V$, on a $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. De plus, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de V

(2) Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille orthogonale dans V, alors
$$\forall\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \cdot \|x_j\|^2$$
Si de plus les $x_1, \dots, x_n$ sont non-nuls, alors $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille libre.

(3) Si W est un sous-espace vectoriel de V, alors $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Preuve (1) Il est claire que $\mathrm{Vect}(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Soit $x \in A^{\perp}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(y_1, \dots, y_n) \in V^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle x, y_n \rangle = 0.$$
Donc $x \in \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.

Si x et y sont deux éléments de $A^{\perp}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. alors pour tout $z \in A$ on a $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle = 0$. Donc $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$

(2) On raisonne par récurrence sur n. Le cas où $n = 1$ est trivial

Traitons le cas où $n = 2$. On a
$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|^2 = \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \rangle$$
$$= \lambda_1^2 \langle x_1, x_1 \rangle + \underbrace{2 \lambda_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle}_{= 0} + \lambda_2^2 \langle x_2, x_2 \rangle = \lambda_1^2 \|x_1\|^2 + \lambda_2^2 \|x_2\|^2.$$
Dans la suite, on suppose que $n > 2$ et que l'énoncé est vrai pour toute famille orthogonale de $n-1$ vecteurs. D'après (1) on a $x_n \perp \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$.

Donc (par le cas où $n=2$) $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|^2 = \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}\|^2 + \lambda_n^2 \|x_n\|^2$.

Par l'hypothèse de récurrence, on a $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 \|x_j\|^2$, d'où
$$\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \|x_j\|^2.$$
Si les x_j sont non-nuls, alors $\|x_j\| > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Par conséquent, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, on a $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\| > 0$ et donc $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \neq 0$.

(3) Comme W et $W^{\perp}$ sont des sous-espace vectoriel de V, on a $0 \in W \cap W^{\perp}$. Si $x \in W \cap W^{\perp}$, alors $\langle x, x \rangle = 0$. Cela montre que $x = 0$. ※

Def On dit qu'un sous-ensemble B de V est une base ~~orthogonale~~ orthonormée si les conditions suivantes sont satisfaites. ① $\forall\ x \in B$, $x \neq 0$, ② $B^{\perp} = \{0\}$ ③ B est une famille ~~orthogonale~~ orthonormée

MP4 : séance 1

2017年11月10日 19:21

<u>Théorème 6</u> (Parseval) Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille orthonormée dans V et F le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$

(1) $\forall x \in V$, $p_F(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \perp F$.

(2) Pour tout $x \in V$, on a $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$

<u>Preuve</u> (1) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\langle p_F(x), e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$

Donc $x - p_F(x) \perp e_j$. On en déduit $x - p_F(x) \perp F$.

Si y est un autre élément de F tel que $x - y \perp F$, alors $y - p_F(x) \in F \cap F^\perp = \{0\}$.

(2) Comme $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, on a $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

※

<u>Corollaire</u> On suppose que V est de type fini. Une famille orthogonale $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ dans V est une base orthogonale si et seulement si elle forme une base de V.

<u>Preuve</u> Si B est une base de V, alors $\mathrm{Vect}(B) = V$ et donc $B^\perp = V^\perp = V \cap V^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, si B est une base orthogonale, alors elle est une famille libre (d'après Prop 5)

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par B. Pour tout $x \in V$ on a $x - p_F(x) \perp F$ et donc $x = p_F(x) \in F$. La famille B est donc génératrice.

⚠ Dans le cas où V n'est pas de type fini, une base orthogonale n'est pas nécessairement génératrice. Par contre, elle est toujours une famille libre.

<u>Théorème 7</u> (Gram-Schmidt) On suppose que V est de type fini. Soit $(x_i)_{i=1}^{n}$ une base de V. Pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, soit V_j le sous-espace vectoriel de V engendré par les x_i avec $i \leq j$

Il existe alors une unique base orthogonale $(y_i)_{i=1}^{n}$ telle que $y_i - x_i \in V_{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

<u>Preuve</u> On construit les y_i par récurrence. D'abord $y_1 = x_1$ est l'unique élément de V tel que $y_1 - x_1 \in V_0 = \{0\}$. Evidemment $\{y_1\}$ est une base orthogonale de V_1.

Supposons que $i \geq 2$ et que l'on a construit une base orthogonale $\{y_1, \dots, y_{i-1}\}$ de V_{i-1} telle que $y_j - x_j \in V_{j-1}$ pour tout $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Par le théorème de Parseval, il existe un unique élément $P_{V_{i-1}}(x_i) \in V_{i-1}$ tel que $x_i - P_{V_{i-1}}(x_i) \perp V_{i-1}$. On en déduit que $y_i = x_i - P_{V_{i-1}}(x_i)$ est un élément orthogonal à V_{i-1} tel que $x_i - y_i \in V_{i-1}$.

Il est de plus unique car si $z \in V_{i-1}^\perp$ est tel que $x_i - z \in V_{i-1}$, alors on a $x_i - z = P_{V_{i-1}}(x_i)$ car $x_i - (x_i - z) = z \in V_{i-1}^\perp$. En outre, par construction $\mathrm{Vect}(\{y_1, \dots, y_i\}) = \mathrm{Vect}(V_{i-1} \cup \{y_i\}) = \mathrm{Vect}(V_{i-1} \cup \{x_i\})$. Donc $\{y_1, \dots, y_i\}$ est une base orthogonale de V_i

※