CHAPITRE 3

SÉRIES DE FONCTIONS

Dans cette séance, k désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe en outre un ensemble non-vide Ω

3.1. Suite de fonctions, convergence simple

On appelle *suite de fonctions* sur Ω (à valeurs dans k) toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application de Ω dans k.

Définition 3.1. — Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Ω et $f : \Omega \to k$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers f si, pour tout $x \in \Omega$ fixé, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemple 3.2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x^n$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$.

3.2. Convergence uniforme

Pour toute fonction $f : \Omega \to k$, on définit

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \in [0, +\infty].$$

Si $\|f\| < +\infty$, on dit que la fonction f est bornée.

Définition 3.3. — Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Ω à valeurs dans k et $f : \Omega \to k$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers f si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\sup} = 0.$$

Remarque 3.4. — On voit aussitôt de la définition que, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors il converge simplement vers f. La réciproque n'est cependant pas vraie. On peut considérer l'exemple 3.2 où $f_n(x) = x^n$. On a $\|f_n - \mathbb{1}_{\{1\}}\|_{\sup} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.5. — *Soient (X, d) un espace métrique non-vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur X à valeurs dans k, qui converge uniformément vers une fonction $f : X \to k$. Soit x un élément de X. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x, alors la fonction f est continue en x aussi.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers x. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x)| &\leqslant |f(x_n) - f_m(x_n)| + |f_m(x_n) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|\\ &\leqslant 2\|f - f_m\|_{\sup} + |f_m(x_n) - f_m(x)|.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant la continuité de f_m on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x)| \leqslant 2\|f - f_m\|_{\sup}.$$

Par passage à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0.$$

□

Proposition 3.6. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de classe C^1 sur un intervalle fermé et borné $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I et qu'il existe un élément $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 sur I, et la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f'.*

Démonstration. — Soit g la limite de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la proposition 3.5, la fonction g est continue sur I. En particulier, elle est bornée car I est séquentiellement compact. Soient M la limite de la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f : I \to k$ la fonction telle que

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + M.$$

Comme g est continue, on a $f' = g$. En outre, pour tout $x \in I$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f'_n(t) - g(t)dt + f_n(x_0) - M\right| \leqslant |f_n(x_0) - M| + \|f'_n - g\|_{\sup}(b - a).$$

On en déduit

$$\|f_n - f\|_{\sup} \leqslant |f_n(x_0) - M| + \|f'_n - g\|_{\sup}(b - a).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. □

3.3. Série de fonctions

Définition 3.7. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Ω à valeurs dans k. On appelle *série de fonctions* associée à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonction $(\sum_{j=0}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Attention, le symbole $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ désigne une suite de fonction et *a priori* n'a rien avoir avec la somme infinie. Si cette suite converge simplement (resp. uniformément), on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement* (resp. *uniformément*), et par abus de notation on utilise la même expression $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ pour désigner la fonction limite, appelée la *somme* de la série de fonctions.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Ω à valeurs dans k. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement* si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\sup}$ converge. On voit que la convergence normale implique la convergence uniforme, et la convergence uniforme implique la convergence simple.

On déduit des propositions 3.5 et 3.6 les résultats suivants pour les séries de fonctions.

Proposition 3.8. — *Soient (X, d) un espace métrique et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions sur X. Soit $x \in X$. Si chaque f_n est continue en x et si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, alors la fonction somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est continue en x.*

Proposition 3.9. — *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur I. On suppose que*

(a) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge,

(b) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ converge normalement.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement vers une fonction de classe C^1 sur I, dont la dérivée s'identifie à la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$.

3.4. Séries de Fourier

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\mathbf{e}_n$ la fonction sur $[0, 1]$ à valeurs complexes telle que

$$\mathbf{e}_n(t) = e^{2i\pi nt}.$$

Proposition 3.10. — *L'ensemble $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans l'espace préhilbertien $C^0([0, 1], \mathbb{C})$.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle_{L^2} = \int_0^1 \mathbf{e}^{-2i\pi nt} \mathbf{e}^{2i\pi nt} dt = \int_0^1 1dt = 1.$$

Si n et m sont deux entiers, $n \neq m$, on a

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle_{L^2} = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} e^{2i\pi mt} dt = \int_0^1 e^{2i\pi(m-n)t} dt = \Big[\frac{e^{2i\pi(m-n)t}}{2i\pi(m-n)}\Big]_0^1 = 0.$$

□

Définition 3.11. — Soit f un élément de $C^0([0,1],\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on désigne par $c_n(f)$ le nombre complexe $\langle \mathbf{e}_n, f\rangle_{L_2}$, appelé $n^{\text{ième}}$ *coefficient de Fourier* de f. On désigne par $S(f)$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$

$$S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathbf{e}_n, \quad N \in \mathbb{N},$$

appelée *série de Fourier* de la fonction f.

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\cdot)$ est une forme linéaire sur $C^0([0,1],\mathbb{C})$. En outre, $S_N(\cdot)$ définit une application linéaire de $C^0([0,1],\mathbb{C})$ dans lui-même, qui est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{e}_{-N},\dots,\mathbf{e}_0,\dots,\mathbf{e}_N$. En outre, par définition on a

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Remarque 3.12. — Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, pour tout entier n on a $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$. En particulier, $c_0(f)$ est un nombre réel, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

$$c_n(f)e^{2i\pi nt} + c_{-n}(f)e^{-2i\pi nt} = 2\mathrm{Re}(c_n(f))\cos(2\pi nt) - 2\mathrm{Im}(c_n(f))\sin(2\pi nt).$$

On note

$$a_n(f) := 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)dx,$$

$$b_n(f) := -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx,$$

et

$$a_0(f) := c_0(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ces coefficients sont appelés *coefficients de Fourier réels* de f. La série de Fourier de f s'écrit comme

$$a_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geqslant 1} a_n(f)\cos(2\pi nt) + b_n(f)\sin(2\pi nt).$$

Proposition 3.13. — *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$c_n(f') = f(1) - f(0) + 2i\pi n c_n(f).$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \int_0^1 f'(t)e^{-2i\pi nt}dt = [f(t)e^{-2i\pi nt}]_0^1 - \int_0^1 f(t)(-2i\pi n)e^{-2i\pi nt}dt \\ &= f(1) - f(0) + 2i\pi n c_n(f). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.14. — *Pour toute fonction* $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$*, on a*

$$\|f\|_{L^2}^2 \geqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.17. □

Corollaire 3.15 **(Théorème de Riemann-Lebesgue).** — *Pour toute fonction* $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$*, on a*

$$\lim_{|n|\to+\infty} |c_n(f)| = 0.$$

Remarque 3.16. — D'après le corollaire 3.15, on obtient que, pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(2\pi N t)dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(2\pi N t)dt = 0.$$

Par un changement de variables, on obtient que, pour toute fonction continue $g : [0,1/2] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{1/2} g(y)\cos(\pi N y)dy = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{1/2} g(y)\sin(\pi N y)dy = 0 \tag{3.1}$$

3.5. Convergence de série de Fourier

Soit f une fonction dans $C^0([0,1],\mathbb{C})$. On suppose que $f(0) = f(1)$ et On étend f en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ en mettant

$$\widetilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor).$$

Sur $[0,1]$, on a $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{2i\pi n x} = \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{2i\pi n(x-t)}dt.$$

On introduit le *noyau de Dirichlet* comme suit :

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{2i\pi n x} = e^{-2i\pi N x}\frac{\mathrm{e}^{2i\pi(2N+1)x} - 1}{e^{2i\pi x} - 1} = \frac{e^{i\pi(2N+1)x} - e^{-i\pi(2N+1)x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Avec cette notation, on a

$$S_N(f)(x) = \int_0^1 f(t)D_N(x-t)dt.$$

La fonction D_N est réelle, 1-périodique et paire. En outre, on a

$$\int_0^1 D_N(t)dt = 1 \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t)dt = \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

On obtient alors (par la 1-périodicité de $\widetilde{f}$ et D_N)

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \int_0^1 \widetilde{f}(t) D_N(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{f}(x-y) D_N(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\widetilde{f}(x+y) + \widetilde{f}(x-y)) D_N(y)dy. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Théorème 3.17. — *Soit f une fonction dans $C^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\widetilde{f}$ la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [0,1]$. Si x est un élément de $\mathbb{R}$ tel que les limites*

$$\lim_{\delta\to 0+} \frac{\widetilde{f}(x+\delta) - \widetilde{f}(x)}{\delta} \quad et \quad \lim_{\delta\to 0+} \frac{\widetilde{f}(x-\delta) - \widetilde{f}(x)}{\delta}$$

existent, alors la suite $(S_N(f)(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widetilde{f}(x)$.

Démonstration. — D'après les formules (3.2) et (3.3), on a

$$|S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(x-y) - \widetilde{f}(x)) D_N(y)dy \right|.$$

Soit $g :]0,1/2] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(y) = \frac{f(x+y) - f(x) + f(x-y) - f(x)}{y}.$$

Cette fonction s'étend par continuité en une fonction continue sur $[0,1/2]$. Ainsi

$$|S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x)| = \left| \int_0^{1/2} g(y) \frac{y}{\sin(\pi y)} \sin((2N+1)\pi y)dy \right|$$

converge vers 0 quand $N \to +\infty$ (d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, voir la formule (3.1)) car $y \mapsto g(y)y/\sin(\pi y)$ s'étend par continuité en une fonction continue sur $[0,1/2]$. □

Théorème 3.18. — *Soit f une fonction dans $C^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$, soit*

$$M_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} S_j(f).$$

Alors la suite de fonctions $(M_N(f))_{N\in\mathbb{N},\, N\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Démonstration. — Par définition, on a

$$M_N(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{1/2} (\widetilde{f}(x-y) + \widetilde{f}(x+y)) D_j(y)dy$$

où $\widetilde{f}$ est la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui prolonge f. En outre, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N-1} D_j(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{e^{i\pi(2j+1)x} - e^{-i\pi(2j+1)x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{e^{2i\pi Nx} + e^{-2i\pi Nx} - 2}{(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})^2} \\ &= -\frac{\cos(2\pi Nx) - 1}{2\sin(\pi x)^2} = \frac{\sin(\pi Nx)^2}{\sin(\pi x)^2}.\end{aligned}$$

Soit F_N le noyau de Féjer, défini comme

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi Nx)^2}{\sin(\pi x)^2}.$$

En prenant f comme la fonction constant 1 on obtient $S_N(f) = 1$ pour tout N et donc

$$\int_0^{1/2} F_N(x)dx = \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$M_N(f)(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (\widetilde{f}(x-y) + \widetilde{f}(x-y) - 2\widetilde{f}(x))F_N(y)dy.$$

Soit $\delta \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}|M_N(f)(x) - f(x)| &\leqslant \int_0^{\delta} |\widetilde{f}(x-y) + \widetilde{f}(x+y) - 2\widetilde{f}(x)|F_N(y)dy \\ &+ \frac{4\|f\|_{\sup}}{N}\int_\delta^{1/2} \frac{\sin(\pi Ny)^2}{\sin(\pi y)^2}dy \\ \leqslant \sup_{\substack{(a,b)\in[-1,1]^2 \\ |a-b|\leqslant\delta}} &|\widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(b)| + \frac{4\|f\|_{\sup}}{N}\int_\delta^{1/2} \frac{1}{\sin(\pi y)^2}dy.\end{aligned}$$

En prenant les limites quand $N \to +\infty$ et $\delta \to 0+$ successivement on obtient

$$\limsup_{N\to+\infty} \|M_N(f) - f\|_{\sup} = 0.$$

□

Lemme 3.19. — *Pour toute fonction* $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ *on a* $\|f\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{\sup}$.

Démonstration. — Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes. On a

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leqslant \|f\|_{\sup}^2.$$

□

Proposition 3.20. — *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *telle que* $f(0) = f(1)$. *La suite* $(S_N(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *par rapport à la norme* L^2.

Démonstration. — Comme $M_N(f)$ est dans le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{e}_{-N}, \ldots, \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_N$, on a (car $S_N(f)$ est la projection orthogonale)

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2} \leqslant \|M_N(f) - f\|_{L^2} \leqslant \|M_N(f) - f\|_{\sup}.$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$, d'après la proposition 3.18 on obtient que

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^2} = 0.$$

□

3.6. Égalité de Parseval

Théorème 3.21. — *Soit f une fonction dans $C^0([0,1], \mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$. L'égalité suivante est vraie :*

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \tag{3.4}$$

Démonstration. — Comme $\|S_N(f) - f\|_{L^2}$ converge vers 0 quand $N \to +\infty$, on obtient que

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2,$$

d'où le résultat. □

Proposition 3.22 **(Inégalité de Wirtinger)**. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 qui est 1-périodique. Soit $m_f = \int_0^1 f(x)dx$. Alors*

$$\int_0^1 |f(x) - m_f|^2 dx \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

Démonstration. — Quitte à rajouter une fonction constante à f on peut supposer sans perte de généralité que $m_f = 0$. Comme f est de classe C^1 et 1-périodique on a

$$c_n(f') = 2i\pi n c_n(f).$$

En outre, $c_0(f) = m_f = 0$. L'égalité de Parseval donne alors

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0} |2i\pi n c_n(f)|^2 \geqslant 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0} |c_n(f)|^2 = 4\pi^2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

□