MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

§1 Formes linéaires sur un espace préhilbertien

On fixe un espace préhilbertien $(V, \langle , \rangle)$. Soit $\|\cdot\|$ la norme induite par $\langle , \rangle$.

<u>Proposition 1</u> Soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de type fini de V, qui est de dimension 0 ou 1 sur $\mathbb{R}$. En outre, si $\dim \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp = 1$, alors il existe un unique élément $x_\varphi \in V$ tel que

$$\forall y \in V, \quad \varphi(y) = \langle x_\varphi, y \rangle.$$

<u>Preuve</u> Si $\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp = \{0\}$, alors il est de type fini et de dimension 0 sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe un élément non-nul x_0 dans $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$. Alors $\varphi(x_0) \neq 0$ car sinon $x_0 \in \mathrm{Ker}\,\varphi \cap (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp = \{0\}$.
Soit $x \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$. Montrons que x est proportionnel à x_0. Soit $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$.
Par définition $\varphi(x - \lambda x_0) = \varphi(x) - \lambda\varphi(x_0) = 0$ et donc $x - \lambda x_0 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.
En outre, comme x et x_0 appartiennent à $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$, on a $x - \lambda x_0 \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$. On en déduit $x = \lambda x_0$.
Montrons le deuxième énoncé. On suppose sans perte de généralité que $\|x_0\| = 1$. Soit $x_\varphi = \varphi(x_0)\, x_0$.
On a $\varphi(x_\varphi) = \varphi(x_0)^2 = \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle$. En outre, tout vecteur $y \in V$ s'écrit sous la forme

$$y = \lambda x_\varphi + z, \quad \text{où} \quad \lambda = \varphi(y)/\varphi(x_\varphi) \quad \text{et} \quad z \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

unicité : si x'_φ vérifie $\forall y \in V,\ \varphi(y) = \langle x'_\varphi, y \rangle$ alors $x'_\varphi - x_\varphi \perp V$ et donc $x'_\varphi - x_\varphi = 0$

On a $\langle x_\varphi, y \rangle = \lambda \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle + \langle x_\varphi, z \rangle = \lambda \varphi(x_\varphi) = \varphi(y)$. ※

<u>Def</u> Soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On dit que φ est **bornée** s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\varphi(y)| \leqslant C\|y\|$ pour tout $y \in V$.

<u>Remarque</u> La proposition 1 montre que, si $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ est non-nul, alors φ est bornée.
En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que, pour tout $y \in V$

$$|\varphi(y)| = |\langle x_\varphi, y \rangle| \leqslant \|x_\varphi\| \cdot \|y\|.$$

<u>Def</u> On dit que $(V, \langle , \rangle)$ est un espace **hilbertien** si, pour toute forme linéaire bornée et non-nulle $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, on a $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp = 1$.

<u>Prop</u> Tout espace préhilbertien de type fini est un espace hilbertien.

<u>Preuve</u> Soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non-nulle. Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une base de V telle que $(x_i)_{i=1}^{n-1}$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Par Gram-Schmidt, il existe une base orthogonale $(e_i)_{i=1}^n$ de V telle que $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$, d'où $0 \neq e_n \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ ※

MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

§2 Projection orthogonale

<u>Théorème 2</u> Soient $(V, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de V. On suppose que F muni de la restriction de $\langle , \rangle$ à $F \times F$ forme un espace hilbertien.

Alors (1) Pour tout $x \in V$, il existe un unique $P_F(x) \in F$ tel que $x - P_F(x) \perp F$

(2) V est la somme directe de F et $F^\perp$, c'est-à-dire $V = F + F^\perp$, et $F \cap F^\perp = \{0\}$.

<u>Preuve</u> (2) est une conséquence immédiate de (1).

(1) On considère la forme linéaire $\varphi : F \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \langle x, y \rangle$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, φ est bornée. Il existe donc un unique $P_F(x) \in F$ tel que $\varphi(y) := \langle x, y \rangle = \langle P_F(x), y \rangle$ $\left(\underset{x - P_F(x) \perp F}{\text{c'est-à-dire}}\right)$. ※

<u>Corollaire</u> Sous l'hypothèse du théorème, $P_F : V \to F$ est une application linéaire.

<u>Preuve</u> Soient $(x, y) \in V \times V$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. on a

$$\lambda x + \mu y - \lambda P_F(x) - \mu P_F(y) = \lambda (x - P_F(x)) + \mu (y - P_F(y)) \in F^\perp.$$

Par l'unicité de $P_F(\lambda x + \mu y)$, on obtient $P_F(\lambda x + \mu y) = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$. ※

<u>Corollaire</u> Pour tout $x \in V$ on a $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$.

<u>Preuve</u> Soit $x \in V$. On a $x - P_F(P_F(x)) = x - P_F(x) + P_F(x) - P_F(P_F(x)) \in F^\perp$ ※

§3 Adjonction

<u>Def</u> Soient $(E, \langle , \rangle_E)$ et $(F, \langle , \rangle_F)$ deux espaces préhilbertiens, $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ des normes induite par $\langle , \rangle_E$ et $\langle , \rangle_F$ respectivement, et $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est **bornée** s'il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\forall\ x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E.$$

On appelle **adjoint** de T toute application linéaire $T^* : F \to E$ telle que

$$\forall\ (x, y) \in E \times F, \quad \langle T^*(y), x \rangle_E = \langle y, T(x) \rangle_F.$$

<u>Prop 3</u> On suppose que E est hilbertien. Alors toute application linéaire bornée $T : E \to F$ admet un unique adjoint.

<u>Preuve</u> Soit $y \in F$. On considère la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \langle y, T(x) \rangle_F$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\varphi(x)| \leq \|y\|_F \cdot \|T(x)\|_F \leq C \|y\|_F \cdot \|x\|_E$.

Donc φ est bornée. Il existe un unique élément $T^*(y) \in E$ telle que, $\forall x \in E$

$\langle T^*(y), x \rangle_E = \varphi(x) = \langle y, T(x) \rangle_F$.

MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

Montrons que T^* est une application linéaire. Soient $(y_1, y_2) \in F^2$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in E$ on a

$$\langle a_1 T^*(y_1) + a_2 T^*(y_2), x \rangle = a_1 \langle T^*(y_1), x \rangle + a_2 \langle T^*(y_2), x \rangle$$

$$= a_1 \langle y_1, T(x) \rangle + a_2 \langle y_2, T(x) \rangle = \langle a_1 y_1 + a_2 y_2, T(x) \rangle = \langle T^*(a_1 y_1 + a_2 y_2), x \rangle.$$

Par l'unicité on obtient $T^*(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 T^*(y_1) + a_2 T^*(y_2)$.

Enfin, pour tout $y \in F$ on a

$$\|T^*(y)\|^2 = \langle T^*(y), T^*(y) \rangle = \langle y, T(T^*(y)) \rangle \leqslant \|y\| \cdot \|T(T^*(y))\|$$
$$\leqslant C \|y\| \cdot \|T^*(y)\|.$$

Donc T^* est bornée. ※

Remarque ① Soient E et F deux espaces préhilbertiens, et $T: E \to F$ une application linéaire. Si T admet un adjoint T^*, par définition T est un adjoint de T^*.

② Soient E, F et G trois espaces préhilbertiens, $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications linéaires, qui admettent des adjoints $f^*: F \to E$ et $g^*: G \to F$, respectivement. Alors $f^* \circ g^*$ est un adjoint de $g \circ f$. En effet, $\forall (x, z) \in E \times G$

$$\langle z, (g \circ f)(x) \rangle_G = \langle z, g(f(x)) \rangle_G = \langle g^*(z), f(x) \rangle_F = \langle f^*(g^*(z)), x \rangle_E$$

③ Si E est de type fini, alors toute application linéaire $T: E \to F$ est bornée. En effet, si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in E$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_E^2 = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) \quad \text{et} \quad \|T(x)\|_F^2 \leqslant \left(|\lambda_1| \cdot \|T(e_1)\|_F + \dots + |\lambda_n| \cdot \|T(e_n)\|_F\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy-Schwarz}} \leqslant \|x\|_E^2 \left(\|T(e_1)\|_F^2 + \dots + \|T(e_n)\|_F^2\right)$$

§4 Endomorphismes auto-adjoints et orthogonaux

Def Soient $(V, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et $T: V \to V$ un endomorphisme. On dit que T est **auto-adjoint** si T est un adjoint de lui-même. On dit que T est **orthogonal** si T est inversible et si T^{-1} est un adjoint de T.

Rem Les endomorphismes auto-adjoints forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple Soit $F \subset V$ un sous-espace hilbertien de V. On désigne par $\pi_F: V \to V$ le composé de $p_F: V \to F$ avec l'application d'inclusion $F \to V$. Alors π_F est auto-adjoint. En effet, $\forall (x, y) \in V \times V$, on a

$$\langle \pi_F(x), y \rangle = \langle \pi_F(x), \pi_F(y) \rangle + \langle \pi_F(x), y - \pi_F(y) \rangle = \langle \pi_F(x), \pi_F(y) \rangle = \langle x, \pi_F(y) \rangle.$$

MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

Proposition Soient $(V, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, et $T: V \to V$ un endomorphisme auto-adjoint. Si $F \subset V$ est un sous-espace vectoriel (espace hilbertien de type fini) tel que $T(F) \subset F$, alors $T(F^\perp) \subset F^\perp$ (orthogonal)

Preuve Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$ on a $\langle x, T(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle = 0$ ※

$\langle x, T(y)\rangle = \langle T^{-1}(x), y\rangle = 0$

Def Soient $(V, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, et $F \subset V$ un sous-espace vectoriel qui est hilbertien. On désigne par $S_F : V \to V$ l'endomorphisme qui envoie $x \in V$ sur $2\pi_F(x) - x$, appelé *symétrie orthogonale* par rapport à F

Prop. S_F est orthogonal et auto-adjoint.

Preuve On a $S_F = 2\pi_F - \mathrm{Id}_V$. Donc il est auto-adjoint. En outre,

$$S_F \circ S_F = (2\pi_F - \mathrm{Id}_V)\circ(2\pi_F - \mathrm{Id}_V) = 4\pi_F\circ\pi_F - 2\pi_F - 2\pi_F + \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_V.$$

Donc S_F est orthogonal. ※

Prop. Soient $(V, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien et $T: V \to V$ un automorphisme (i.e. endomorphisme inversible). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) T est orthogonal (2) $\forall\, x \in V$, $\|T(x)\| = \|x\|$ (3) $\forall\, (x,y) \in V^2$, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Preuve (1) $\Rightarrow$ (3) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^*(T(x)), y\rangle = \langle x, y\rangle$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\langle T(x), T(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x)\|^2 - \|T(y)\|^2\right) = \langle x, y\rangle$

(3) $\Rightarrow$ (1) $\forall\,(x,y)\in V^2$, $\langle T^{-1}(y), x\rangle = \langle T(T^{-1}(y)), T(x)\rangle = \langle y, T(x)\rangle$ ※

Remarque Si V est de type fini, alors tout endomorphisme préservant le produit scalaire est inversible. En effet, si $T(x) = 0$, alors $\|x\| = \|T(x)\| = 0$, donc $x = 0$. On en déduit que T est injectif. Par le théorème du rang, T est aussi surjectif.

§5 Le cas de type fini

On fixe un espace préhilbertien $(V, \langle,\rangle)$ qui est *de type fini*.

Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base orthonormée de V.

Si T est un endomorphisme de V, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$T(e_i) = \langle T(e_i), e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle T(e_i), e_n\rangle e_n$$

Matrice de T : $M_T = \begin{pmatrix} \langle T(e_1), e_1\rangle & \cdots & \langle T(e_n), e_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle T(e_1), e_n\rangle & \cdots & \langle T(e_n), e_n\rangle \end{pmatrix} \rightsquigarrow M_{T^*} = {}^tM_T$

MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

classification en dim 2 pour T orthogonale
① $\det T = -1$, T est une réflexion par rapport à $V_1(T)$
② $\det T = 1$ et 1 est une valeur propre $\Rightarrow T = \mathrm{Id}$
③ $\det T = 1$ et T n'a pas de v.p. réelle $\Rightarrow T$ est une rotation

T est auto-adjoint si et seulement si M_T est symétrique

T est orthogonal si et seulement si ${}^tM_T = M_T^{-1}$.

<u>Proposition</u> Si $T : V \to V$ est orthogonal, alors $\det(T) \in \{1, -1\}$, et toute valeur propre réelle de $T \in \{\pm 1\}$

<u>Preuve</u> On a ${}^tM_T\, M_T = I$. Donc $\det(T)^2 = 1$. Si $T(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $\|T(x)\| = \|x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ※

<u>Def</u> On appelle hyperplan dans V le noyau d'une forme linéaire non-nulle

<u>Prop.</u> Soit H un hyperplan dans V. Alors $\det(S_H) = -1$

<u>Preuve</u> Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base orthonormée de V telle que $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ soit une base de H. Alors la matrice de S_H par rapport à cette base est $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$. ※

<u>Déf</u> On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

<u>Thm</u> Tout endomorphisme orthogonal $f : V \to V$ est le composé d'au plus $\dim(V)$ réflexions

<u>Preuve</u> On raisonne par récurrence sur $r = \dim(V)$. Le cas où $r = 0$ est trivial

On suppose que $r \geq 1$ et que l'énoncé est vrai pour tout espace hilbertien de dimension $< r$.

<u>Premier cas</u> : $\exists\, x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) = x$.

Soit $H = \{x\}^\perp$. C'est un hyperplan invariant par f. Par l'hypothèse de récurrence, il existe des réflexions $s_1, \dots, s_n$ $(n \leq r-1)$ dans H telles que $f|_H = s_1 \circ \cdots \circ s_n$.

Soit $\tilde{s}_i : V \to V$ l'endomorphisme qui prolonge s_i et tel que $\tilde{s}_i(x) = x$

On a $\mathrm{Ker}(\tilde{s}_i - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(s_i - \mathrm{Id}_H) \oplus \mathbb{R}x$. Donc $\tilde{s}_i$ est une réflexion. De plus, on a $f = \tilde{s}_1 \circ \cdots \circ \tilde{s}_n$ car x est invariant par les $\tilde{s}_i$ et par f.

<u>Second cas</u> : $\forall\, x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) \neq x$. Soient $x \in V \setminus \{0\}$, $y = x - f(x) \neq 0$ et $H = \{y\}^\perp$. On a $\langle x + f(x), y \rangle = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = 0$, d'où $x + f(x) \in H$

On obtient donc $S_H(f(x)) = \frac{1}{2}\left(S_H(x + f(x)) - S_H(y)\right) = \frac{1}{2}\left(x + f(x) - y\right) = x$.

Donc s_H échange x et $f(x)$, et donc $s_H \circ f$ est tombé dans le premier cas.

Il existe alors des réflexions $s_1, \dots, s_n$ avec $n \leq r-1$ telles que

$S_H f = s_1 \circ \cdots \circ s_n$. On en déduit $f = S_H \circ s_1 \circ \cdots \circ s_n$ ※

§6 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de type fini

<u>Déf</u> Soit V un espace vectoriel de type fini sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $q : V \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si la fonction $b_q : V \times V \to \mathbb{R}$, $b_q(x, y) := \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$ est une forme bilinéaire (symétrique). b_q est appelée la forme polaire de q

MP4 : Séance 2

2017年11月10日 19:21

On définit $Ker(q) := \{x \in V \mid \forall y \in V,\ b_q(x,y) = 0\}$, appelé le noyau de q.

On dit que q est non-dégénérée si $Ker(q) = \{0\}$

Théorème (décomposition de Gauss)

Soient E un espace vectoriel de type fini sur $\mathbb{R}$ et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe une famille libre $(l_i)_{i=1}^{r}$ dans $E^\vee$ et $(a_1, \cdots, a_r) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^r$ tels que $q = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i^2$

Preuve On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$. Le cas où q est nulle est trivial

On suppose alors que $n > 0$, $q \neq 0$, et que l'énoncé est vrai en dimension $n-1$

Soient $e \in E$ tel que $q(e) \neq 0$, $F = \mathbb{R}\cdot e$ et $G = \{x \in E \mid b_q(x,e) = 0\}$

Comme $q(e) \neq 0$, $F \cap G = \{0\}$. De plus, pour tout $y \in E$ on a $y - \frac{b_q(y,e)}{q(e)} e \in G$

Soit $l_1 : E \to \mathbb{R}$, $l_1(y) = \frac{b_q(y,e)}{q(e)}$. Soit $\pi : E \to G$, $\pi(y) = y - l_1(y)e$

Pour tout $y \in E$ on a $q(y) = q(\pi(y) + l_1(y)e) = q(\pi(y)) + l_1(y)^2 q(e)$

car $b_q(\pi(y), e) = 0$

La restion de q à G est une forme quadratique sur G. Il existe une famille libre $\{\tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_r\}$ dans $G^\vee$ et $(a_2, \cdots, a_r) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^{r-1}$ tels que

$\forall\ z \in G,\ q(z) = a_2 \tilde{l}_2(z)^2 + \cdots + a_r \tilde{l}_r(z)^2$

Soit $l_i = \tilde{l}_i \circ \pi$ $(i \in \{2, \cdots, r\})$. On a alors $q = q(e) l_1^2 + a_2 l_2^2 + \cdots + a_r l_r^2$.

De plus, si $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ est tel que $\lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_r l_r = 0$, alors on a

$\lambda_1 l_1(e) + \lambda_2 \tilde{l}_2(\pi(e)) + \cdots + \lambda_r \tilde{l}_r(\pi(e)) = \lambda_1 l_1(e) = \lambda_1 = 0$

On en déduit $\lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_r l_r = 0$, qui implique $\lambda_2 \tilde{l}_2 + \cdots + \lambda_r \tilde{l}_r = 0$,

et donc $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ car $(\tilde{l}_i)_{i=2}^{r}$ est libre ✻

Remarque ① $Ker\, q = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(l_i)$. Donc $\dim(Ker\, q) = \dim(E) - r$

Par conséquent r ne dépend pas du choix de la décomposition, appelé rang de q.

② (théorème d'inertie de Sylvester) Soient $r_+ = \#\{j \mid a_j > 0\}$ et $r_- = \#\{j \mid a_j < 0\}$, alors le couple (r_+, r_-) ne dépend pas du choix de décomposition, applé la Signature de q. q est positive $\Leftrightarrow r_- = 0$; q est définie $\Leftrightarrow r_+ = \dim E$ ou $r_- = \dim E$

③ (classification des coniques) On appelle conique tout sous-ensemble C de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie une équation de la forme $q(x,y) + l(x,y) + a = 0$, où $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique non-nulle, $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, et a est une constante.

Si q est définie C est $\emptyset$, un point ou une ellipse ; Si $Sgn(q) = (1,1)$, C est deux droites croisées ou une hyperbole

Si $Sgn(q) = (1,0)$ ou $(0,1)$, C est deux droites parallèles ou une hyperbole.

MP4 : séance 2

2017年11月10日 19:21

§7 Réduction des endomorphismes auto-adjoints

On fixe un espace vectoriel de type fini V sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$

<u>Lemme</u> Soit T un endomorphisme de V. Si V est non-nul, alors il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 1 ou 2 tel que $T(F) \subset F$.

<u>Preuve</u> Soit $V_\mathbb{C}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de la form $x + iy$ où x et y sont des vecteurs de V. Soit $T_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ l'endomorphisme défini par $T_\mathbb{C}(x+iy) = T(x) + i\,T(y)$. Soit $x+iy$ un vecteur propre de $T_\mathbb{C}$, avec valeur propre $\lambda = a+bi$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$T_\mathbb{C}(x+iy) = T(x) + i\,T(y) = (a+bi)(x+iy) = (ax-by) + i(bx+ay)$$

Donc $T(x) = ax - by$ et $T(y) = bx + ay$. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{x, y\})$. On a $T(F) \subset F$ #

<u>Théorème</u> Soit T un endomorphisme auto-adjoint de V. Il existe une base orthonormée de V qui est constituée des vecteurs propres de T. De plus, les valeurs propres de T sont réelles

<u>Preuve</u> On raisonne par récurrence sur $n = \dim V$

L'énoncé est trivial si $\dim V = 0$ ou 1. Traitons le cas où $n \geq 2$ en supposant que l'énoncé est vrai pour tout espace hilbertien de dimension $< n$.

D'après le lemme, il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 1 ou 2 tel que $T(F) \subset F$. Si F est de dimension 1, il est un sous-espace propre de T. Si F est de dimension 2, soit A la matrice de $T|_F$ par rapport à une base orthonormée de F. Comme T est auto-adjoint, $T|_F$ l'est aussi. A est donc une matrice symétrique de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 - b^2)$$

admet $a \pm b$ comme racines. Donc T admet toujours un vecteur propre e_1 de valeur propre réelle.

Soit $L = \mathbb{R}e_1$, on a $T(L^\perp) \subset L^\perp$, et $T|_{L^\perp}$ est auto-adjoint. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour construire une base orthonormée $\{e_2, \ldots, e_n\}$ de $L^\perp$ qui est constituée des vecteurs propres de $T|_{L^\perp}$ (donc de T) de valeurs propres réelles. La famille $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de V constituée des vecteurs propres de V de valeurs propres réelles.

#