MP4: séance 3

2018年1月13日 16:08

§1 Relation d'ordre, inf et sup

Déf Soit Ω un ensemble. On appelle relation d'ordre sur Ω toute relation binaire $\leq$ sur Ω qui vérifie les conditions suivantes

(1) (réflexivité) $\forall\, x \in \Omega,\ x \leq x$

(2) (antisymétrie) $\forall\, (x,y) \in \Omega^2$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$

(3) (transitivité) $\forall\, (x,y,z) \in \Omega^3$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$

Le couple $(\Omega, \leq)$ est appelé un ensemble ordonné. Si de plus la condition suivante est satisfaite : $\forall\, (x,y) \in \Omega^2$, ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$, alors on dit que $(\Omega, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exemple $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ avec $-\infty \leq x \leq +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Déf Soient $(\Omega, \leq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de Ω. On dit qu'un élément $\alpha \in \Omega$ est un minorant de A si $\forall\, x \in A$ on a $\alpha \leq x$. On dit qu'un élément $\beta \in \Omega$ est un majorant de A si $\forall\, x \in A$ on a $x \leq \beta$.

On dit que A admet un infimum s'il existe un élément $\inf A$ dans Ω qui vérifie les conditions suivantes : ($\inf A$ est appelé l'infimum de A)

① $\inf A$ est un minorant de A ② pour tout minorant α de A, on a $\alpha \leq \inf A$

(on voit aussitôt par l'antisymétrie que, si $\inf A$ existe, alors il est unique)

On dit que A admet un supremum s'il existe un élément $\sup A$ dans Ω qui vérifie les conditions suivantes : ($\sup A$ est appelé le supremum de A)

① $\sup A$ est un majorant de A ② pour tout majorant β de A, on a $\sup A \leq \beta$

Prop! Soient $(\Omega, \leq)$ un ensemble ordonné, A et B deux sous-ensembles de Ω, $A \subset B$. Si $\inf A$ et $\inf B$ existent, alors $\inf B \leq \inf A$. Si $\sup A$ et $\sup B$ existe, alors $\sup A \leq \sup B$.

Preuve Pour tout $x \in A \subset B$, on a $\underset{x \leq \sup B}{\inf B \leq x}$, i.e. $\underset{\sup B}{\inf B}$ est un $\underset{\text{majorant}}{\text{minorant}}$ de A, donc $\underset{\sup A \leq \sup B}{\inf B \leq \inf A}$

Fait (admis) Tout sous-ensemble A de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ admet un inf et un sup

Notation Si M est un ensemble et si $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est une application, on utilise les expressions $\sup f$ (resp. $\inf f$) pour désigner $\sup f(M)$ (resp. $\inf f(M)$). Afin de souligner le domaine de définition, on utilise aussi les expressions $\sup\limits_{x \in M} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in M} f(x)$) pour désigner $\sup f$ (resp. $\inf f$).

MP4: séance 3

2018年1月13日 16:07

<u>Prop.</u> Soient M un ensemble, et f et g deux applications de M dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On suppose que, $\forall\, x\in M$, $f(x)\leq g(x)$ Alors on a $\inf f\leq \inf g$ et $\sup f\leq \sup g$

<u>Preuve</u> Pour tout $x\in M$ on a $\inf f\leq f(x)\leq g(x)\leq \sup g$. Ainsi $\inf f$ est un minorant de $g(M)$ et $\sup g$ est un majorant de $f(M)$. On en déduit donc $\inf f\leq \inf g$ et $\sup f\leq \sup g$. ※

<u>Prop.</u> Soient M un ensemble et $f: M\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ une application. On a

$$\sup(-f)=-\inf f \quad \text{et} \quad \inf(-f)=-\sup f$$

En outre, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, on a $\sup(af)=a\sup f$, $\inf(af)=a\inf f$

<u>Preuve</u> Pour tout $x\in M$ on a $\inf f\leq f(x)\leq \sup f$ et donc $-\sup f\leq -f(x)\leq -\inf f$

On en déduit $-\sup f\leq \inf(-f)$ et $\sup(-f)\leq -\inf f$.

En les appliquant à $-f$ on obtient $-\sup(-f)\leq \inf f$ et $\sup f\leq -\inf(-f)$

Donc on a les égalités $\sup(-f)=-\inf f$ et $\inf(-f)=-\sup f$

$\forall\, x\in M$ on a $\inf(af)\leq af(x)\leq \sup(af)$ et donc $a^{-1}\inf(af)\leq f(x)\leq a^{-1}\sup(af)$.

On en déduit $a^{-1}\inf(af)\leq \inf f$ et $\sup f\leq a^{-1}\sup(af)$, et donc $\inf(af)\leq a\inf f$ et $\sup(af)\leq a\sup f$. En les appliquant à $-f$ on obtient $\inf(-af)=-\sup(af)\leq a\inf(-f)=-a\sup f$ et

$$\sup(-af)=-\inf(af)\leq a\sup(-f)=-a\inf f.$$

D'où les égalités $\sup(af)=a\sup f$ et $\inf(af)=a\inf f$ ※

<u>Prop.</u> Soient I et J deux ensembles, $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: J\to\mathbb{R}$ deux applications, et $h: I\times J\to\mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x,y)\in I\times J$ sur $f(x)+g(y)$.

On a $\sup f+\sup g=\sup h$ et $\inf f+\inf g=\inf h$.

<u>Preuve</u> $\forall\,(x,y)\in I\times J$ on a $\inf f+\inf g\leq f(x)+g(y)\leq \sup f+\sup g$.

Donc $\inf f+\inf g\leq \inf h$ et $\sup h\leq \sup f+\sup g$

Pour tout $x\in I$ fixé, on a $\forall\, y\in J$, $\inf h\leq h(x,y)=f(x)+g(y)\leq \sup h$ et donc $\inf h-f(x)\leq g(y)\leq \sup h-f(x)$. On en déduit $\inf h-f(x)\leq \inf g\leq \sup g\leq \sup h-f(x)$ et donc $\inf h-\inf g\leq f(x)\leq \sup h-\sup g$, qui implique les inégalités inverses

(les cas où $\sup g=+\infty$ ou $\inf g=-\infty$ sont faciles)

Prop. Soient M un ensemble, et f et g deux applications de M dans $\mathbb{R}$. On a

$$\inf f + \inf g \leq \inf (f+g) \quad \text{et} \quad \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

Preuve On a $\inf f + \inf g = \inf\limits_{(x,y)\in M^2} (f(x)+g(y)) \leq \inf\limits_{x\in M} (f(x)+g(x)) = \inf (f+g)$

La preuve de l'autre inégalité est similaire. ※

Déf Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$, on dit que A est majoré, si A admet un minorant dans $\mathbb{R}$, on dit que A est minoré.

Prop Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ qui est majoré (resp. minoré). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\sup A < a + \varepsilon$ (resp. $\inf A > a - \varepsilon$)

Preuve On raisonne par absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall x \in A$, $\sup A \geq x + \varepsilon$, ($\inf A \leq x - \varepsilon$) alors $\sup A - \varepsilon$ ($\inf A + \varepsilon$) est un majorant (minorant) de A, qui est plus petit (grand) que $\sup A$ ($\inf A$). Cela est absurde.

§2 Limites inférieure et supérieure

Déf Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On appelle limite inférieure de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\in\mathbb{N}, k\geq n} a_k$ de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, noté $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

On appelle limite supérieure de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}, k\geq n} a_k \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \text{ noté } \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Prop. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) dans $\mathbb{R}$ qui est majorée, alors elle converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (resp. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$)

Preuve Soit $l = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l < a_{N_0} + \varepsilon$. On en déduit que $a_n \leq l < a_n + \varepsilon$ et donc $|a_n - l| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0$.
(On a $l \in \mathbb{R}$ car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposer être majorée). On applique le premier énoncé à $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir le deuxième énoncé.

Proposition Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$. Alors on a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Preuve Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}, k\geq n} a_k$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}, n\geq N_0} A_n$. Similairement, si on note $B_n = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}, k\geq n} b_k$, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}, n\geq N_0} B_n$

Par l'hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ on a $A_n \leq B_n$. Donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Prop. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On a $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$. De plus, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ on a $\limsup_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Preuve Ces égalités proviennent directement d'une proposition précédente.

Prop. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}$ qui sont simultanément majorées ou simultanément minorée.
Alors $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ et $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$

Preuve Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soient $C_n := \sup_{k\in\mathbb{N}, k\geq n}(a_k+b_k)$, $A_n := \sup_{k\in\mathbb{N},k\geq n} a_k$, et $B_n := \sup_{k\in\mathbb{N}, k\geq n} b_k$.
On a $C_n \leq A_n + B_n$. En outre, les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et tendent vers $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} b_n$ et $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ respect.
Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont simultanément majorée ou simultanément minorée, alors $\{\lim_{n\to\infty} A_n, \lim_{n\to\infty} B_n\} \neq \{+\infty, -\infty\}$. Quitte à prendre les limites quand $n\to\infty$, on obtient $\lim_{n\to\infty} C_n \leq \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$. En appliquant la première inégalité à $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient la deuxième inégalité ※

Rappel Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et $l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si: ① dans le cas où $l\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que $|a_n-l|<\varepsilon$ pour tout $n\geq N_0$
② dans le cas où $l=+\infty$, $\forall R>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que $a_n>R$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$
③ dans le cas où $l=-\infty$, $\forall R>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que $a_n<-R$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$.
Ce l est noté $\lim_{n\to\infty} a_n$ (il est unique quand il existe)

Théorème Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un élément de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ si et seulement si $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors on a $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Preuve On suppose d'abord que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$
Si $l=+\infty$, pour tout $R>0$. $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que $a_n>R$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$.
On a alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$, $\sup_{k\in\mathbb{N},k\geq n} a_k \geq \inf_{k\in\mathbb{N},k\geq n} a_k \geq R$.
Donc $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Si $l=-\infty$, par un argument similaire, on a $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Si $l\in\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $|a_n-l|<\varepsilon$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$.

MP4: séance 3

2018年1月13日 16:10

i.e. $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$. On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N_0$, on a $l-\varepsilon \leq \inf_{k\in\mathbb{N},\,k\geq n} a_k \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\,k\geq n} a_k \leq l+\varepsilon$. En prenant la limite quand $n\to\infty$, on obtient $l-\varepsilon\leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq l+\varepsilon$. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on a $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = l$.

Réciproquement, on suppose que $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = l$. Comme $\inf_{k\in\mathbb{N},\,k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\,k\geq n} a_k$. En passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. ※

<u>Corollaire</u> Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

§3 Convergence dans un espace vectoriel normé.

Dans ce paragraphe, on fixe un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Déf Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x\in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers x si $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. Si cette condition est satisfaite, on dit que
la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que
x est la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $\lim_{n\to\infty} x_n$. La limite, si elle existe, est unique.

En effet, si y est une autre élément de E qui est aussi la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\|x-y\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - y\|$. Par passage à la limite supérieure, on obtient $\|x-y\|=0$ et donc $x=y$.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est une **suite de Cauchy** si

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k\geq N,\, l\geq N}} \|x_k - x_l\| = 0.$$

<u>Prop.</u> Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, alors $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$

<u>Preuve</u> $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$.

Prop. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est une suite de Cauchy.

Preuve Soit x la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ avec $k\geq N$ et $l\geq N$, on a $\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x\| + \|x_l - x\| \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N},\,n\geq N}\|x_n - x\|$, d'où

$0 \leq \sup_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k\geq N,\, l\geq N}} \|x_k - x_l\| \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N},\,n\geq N}\|x_n - x\|$. Par passage à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Déf On dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet** si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Déf On dit qu'un sous-ensemble A de E est **borné** s'il existe $R>0$ tel que $\forall x\in A$, $\|x\|\leq R$. (autrement dit, $\sup_{x\in A}\|x\| < +\infty$)

Prop. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve Par définition, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sup_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k\geq N,\, l\geq N}} \|x_k - x_l\| \leq 1$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$, on a $\|x_n\| \leq \|x_N\| + \|x_n - x_N\| \leq \|x_N\| + 1$. D'où

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leq \max\{\|x_0\|, \dots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\|+1\}$. ※

MP4: séance 3

2018年1月13日 20:21

Prop. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

Preuve Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par la proposition précédente, cette suite est bornée. Donc $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont des nombres réels. En outre, pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a $\sup_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \\ k\geq N,\, l\geq N}} |a_k - a_l| = \sup_{k\in\mathbb{N}, k\geq N} a_k - \inf_{l\in\mathbb{N}, l\geq N} a_l \geq 0$. Par passage à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. ※

Déf Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x\in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si, pour tout $y\in E$, la suite numérique $(\langle x_n, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, y\rangle$. L'élément x est appelé limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $\operatorname{wlim}_{n\to\infty} x_n$.

Remarque La limite faible, si elle existe, est unique. En effet, si x' et x sont des limites faible de la même suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $y\in E$ on a $\langle x'-x, y\rangle = 0 \Rightarrow x = x'$

Prop. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E, et $x\in E$

(1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors elle converge faiblement vers x

(2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, alors $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$. Si de plus $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x\|$ ou E est de type fini, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Preuve (1) Pour tout $y\in E$, on a $|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\cdot\|y\|$. Donc $\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$

(2) On a $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\cdot\|x\| = \|x\|\cdot\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$

Donc $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$.

Si $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, alors $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$. Donc $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$ converge vers 0 lorsque $n\to+\infty$

Si E est de type fini, il existe une base orthonormée $(e_i)_{i=1}^r$ de E. Pour tout i on a $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$. Par le théorème de Parseval, on a
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^r \langle x_n - x, e_i\rangle^2 = 0.$$

Théorème Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace hilbertien et $\|\cdot\|$ la norme induit par $\langle , \rangle$. Alors $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $y\in E$ et tout $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ on a $|\langle x_k - x_l, y\rangle| \leq \|x_k - x_l\|\cdot\|y\|$. Donc $(\langle x_n, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui converge vers un élément $\varphi(y)$. De plus, par les propriétés de limite, φ est une forme linéaire

MP4: séance 3

2018年1月13日 20:21

Elle est bornée car $\forall y \in E \quad |\varphi(y)| = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n, y\rangle| \leq \left(\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|\right) \cdot \|y\|$

Comme $(E, \langle,\rangle)$ est hilbertien, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(\cdot) = \langle x, \cdot\rangle$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite faible x. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $F_k = \mathrm{Vect}(\{x_0, \dots, x_k\})$.

$\forall y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle \pi_{F_k}(x_n) - \pi_{F_k}(x), y\rangle = \langle x_n - x, \pi_{F_k}(y)\rangle \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$.

Comme F_k est de type fini, on a $\lim_{n\to\infty} \pi_{F_k}(x_n) = \pi_{F_k}(x)$

Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\|x_n - x_k\| \geq \|\pi_{F_k}(x_n - x_k)\| = \|\pi_{F_k}(x_n) - x_k\|$$

Donc $\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq k} \|x_n - x_k\| \geq \|\pi_{F_k}(x) - x_k\|$, qui implique $\lim_{k\to\infty} \|\pi_{F_k}(x) - x_k\| = 0$

Comme $\|x\| \geq \|\pi_{F_k}(x)\| \geq \|x_k\| - \|\pi_{F_k}(x) - x_k\|$, on obtient $\|x\| \geq \limsup_{k\to\infty} \|x_k\|$.

"$\Leftarrow$" On suppose que E est complet. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire bornée. Il suffit de montrer que $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp \neq \{0\}$.